Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
4 Απριλίου 2012

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

$$g(x) = e^x f(x)$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

   7 Μοναδες

2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα-κυρτά και τα σημεία καμπής.

   6 Μοναδες

3. Για τις διάφορες τιμές του m να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = e^{m+x}$.

   6 Μοναδες

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

   6 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x^3 + (f(x))^3 = 1$$

1. Να βρείτε την f.

   6 Μοναδες

2. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\left[-2, \sqrt[3]{9}\right]$.

   6 Μοναδες

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in \left(-2, \sqrt[3]{9}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f\left(\sqrt[3]{9}\right) - f(-2)}{\sqrt[3]{9} + 2} = f'(\xi)$$

   6 Μοναδες

4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

   7 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x - \frac{2}{\pi}x \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 0$$

9 Μονάδες

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f.

8 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\eta\mu x > \frac{2}{\pi}x$$

8 Μονάδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} &\bullet \quad \phi(x) > 0 \\ &\bullet \quad 2\phi(x) = x\phi'(x) \end{aligned} \tag{1}$$

   (α′) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε:

$$\phi(x) = cx^2 \text{ για κάθε } x \geq 0$$

8 Μονάδες

   (β′) Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της ϕ διέρχεται από το σημείο $P(1, 1)$ να βρεθεί ποιό σημείο της γραφικής παράστασης απέχει από το σημείο $Q(0, 1)$ ελάχιστη απόσταση.

8 Μονάδες

2. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0, +\infty)$, που για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$ και έχει την ιδιότητα:

   Αν $M(t, f(t))$, $t > 0$ είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης $\mathcal{C}_f$ τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από

   - την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = t$, $y = 0$

   είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία

   - $O(0, 0)$, $A(t, 0)$,$M(t, f(t)$, $B(0, f(t))$

9 Μονάδες

Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία