Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
16 Ιανουαρίου 2013

Διδάσκοντες:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$f(z) = \frac{i+z}{i-z}, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq i$$

1. Να υπολογίσετε το

$$f\left(i^{11}\right) + f\left(i^{12}\right)$$

5 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι αν $|f(z)| = 1$ τότε $z \in \mathbb{R}$.

6 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των

$$0, \quad -1+2i, \quad f(-1+2i)$$

είναι ισοσκελές.

7 Μονάδες

4. Να αποδείξετε ότι αν $|z| < 1$ τότε:

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

7 Μονάδες

Απαντησεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. $f\left(i^{11}\right) + f\left(i^{12}\right) = f\left(i^{3}\right) + f\left(i^{0}\right) = f(-i) + f(1) = \frac{i+(-i)}{i-(-i)} + \frac{i+1}{i-1} = 0 + (-i) = -i$

2. $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{i+z}{i-z}\right| = 1 \Leftrightarrow |i+z| = |i-z| \underset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |i+(x+yi)| = |i-(x+yi)|$
$|i+(x+yi)| = |i-(x+yi)| \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+y^2+2y+1)} = \sqrt{x^2+y^2-2y+1} \Rightarrow x^2+y^2+2y+1 = x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow y = 0$
Άρα ο z είναι πραγματικός.
Σχόλιο: Το ότι ο z είναι πραγματικός μπορεί να προκύψει και γεωμετρικά από την σχέση $|i+z| = |i-z|$. Η εικόνα του z ισαπέχει από τις εικόνες των $i, -i$ άρα ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν. Η μεσοκάθετος αυτή είναι ο άξονας $x'x$ και επομένως ο z είναι πραγματικός.

3. Είναι $f(-1+2i) = \frac{i+(-2+i)}{i-(-2+i)} = -1+i$.

   - Είναι $|f(-1+2i) - 0| = \sqrt{5}$.
   - Είναι $|(-1+2i) - 0| = \sqrt{5}$.

   Επομένως οι αποστάσεις των εικόνων των $f(-1+2i)$, $-1+2i$ από την εικόνα του 0 είναι ίσες και το τρίγωνο με κορυφές τα τρία αυτά σημεία είναι ισοσκελές.

4. $|f(z)| = \left|\frac{i+z}{i-z}\right| = \frac{|i+z|}{|i-z|} \underset{|i+z|\leq|i|+|z|}{\leq} \frac{|i|+|z|}{|i-z|} = \frac{1+|z|}{|i-z|} \underset{|i-z|\geq||i|-|z||\neq 0}{\leq} \frac{1+|z|}{||i|-|z||} = \frac{1+|z|}{|1-|z||} \underset{|z|<1}{=} \frac{1+|z|}{1-|z|}$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w είναι γνωστό ότι:

- Η εικόνα του z ανήκει στην γραφική παράσταση $\mathcal{C}_1$ της συνάρτησης $f(x) = 2e^x \ x \in \mathbb{R}$.
- $4|w|^2 - (2\mathrm{Im}(w) - 1)^2 + 1 = 0$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο $\mathcal{C}_2$ των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

6 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ δεν έχουν κοινά σημεία.

6 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία που εφάπτεται στις καμπύλες $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$

6 Μονάδες

4. Ένα σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται στην $\mathcal{C}_1$. Να βρεθεί σε ποια θέση του σημείου οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι ίσοι και διάφοροι του 0.

7 Μονάδες

Απαντησεις

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Αν $w = x + yi$ τότε:
$4|w|^2 - (2\mathrm{Im}(w) - 1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+y^2}^2 - (2y-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -x^2$
Επομένως ο $\mathcal{C}_2$ είναι παραβολή με εξίσωση $y = -x^2$.

2. Τα κοινά σημεία των καμπυλών $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ έχουν συντεταγμένες x, y που είναι λύσεις του συστήματος:
$$\left.\begin{array}{l} y = 2e^x \\ y = -x^2 \end{array}\right\}$$
Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με το
$$\left.\begin{array}{l} -x^2 = 2e^x \\ y = -x^2 \end{array}\right\}$$
το οποίο είναι αδύνατο αφού η πρώτη εξίσωσή του $-x^2 = 2e^x$ είναι αδύνατη διότι το α΄ μέλος της είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός και το β΄ μέλος της είναι θετικό. Άρα οι δύο καμπύλες δεν έχουν κοινά σημεία.

3. Οι $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ είναι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 2e^x$ και $g(x) = -x^2$. Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_1$ είναι της μορφής
$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$
Δηλαδή της μορφής
$$y = 2e^{x_1}x + (2e^{x_1} - 2e^{x_1}x_1) \qquad (*)$$
Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_2$ είναι της μορφής
$$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$$
Δηλαδή της μορφής
$$y = -2x_2x + x_2^2 \qquad (**)$$
Για να είναι η $(*)$ κοινή εφαπτομένη των δύο καμπυλών πρέπει να συμπίπτει με μία ευθεία $(**)$. Επομένως θα έχουμε κοινή εφαπτομένη αν υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε οι ευθείες $(*)$, $(**)$ να συμπίπτουν. Δηλαδή αν το σύστημα
$$\begin{array}{l} 2e^{x_1} = -2x_2 \\ 2e^{x_1} - 2e^{x_1}x_1 = \end{array}$$
έχει λύση. Το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το
$$\left.\begin{array}{l} e^{x_1} = -x_2 \\ 2(-x_2) - 2(-x_2)x_1 = (-e^{x_1})^2 \end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$
Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος Σ γράφεται:
$$2e^{x_1} - 2e^{x_1}x_1 = (-e^{x_1})^2$$
ισοδύναμα
$$2 - 2x_1 = e^{x_1} \qquad (***)$$
Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + 2x - 2$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα (αν $x < x'$ τότε $2x < 2x'$, $e^x < e^{x'}$ οπότε $\varphi(x) < \varphi(x')$). Επίσης $\varphi(0) = -1 < 0$ και $\varphi(1) = e > 0$ άρα από το θεώρημα του Bolzano έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Λόγω της μονοτονίας η ρίζα αυτή είναι και η μοναδική ρίζα της φ. Άρα το σύστημα Σ έχει μία μόνο λύση και επομένως οι $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ έχουν ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη.

4. Είναι
$$y(t) = 2e^{x(t)} \Rightarrow y'(t) = 2x'(t)\,e^{x(t)}$$
Κατά την χρονική στιγμή $t - 0$ όπου οι ρυθμοί μεταβολής των $x(t)$, $y(t)$ είναι ίσοι έχουμε:
$$y(t) = 2e^{x(t)} \Rightarrow y'(t_0) =$$
$$2x'(t_0)\,e^{x(t)} \underset{y'(t_0)=x'(t_0)\neq 0}{\Rightarrow} 1 = 2e^{x(t_0)}$$
επομένως
$$\ln 1 = \ln\left(2e^{x(t_0)}\right) \Rightarrow 0 = \ln 2 + x(t_0) \Rightarrow x(t_0) = -\ln 2$$
και
$$y(t_0) = 2e^{-\ln 2} = 1$$
Άρα αν έχουμε ίσους ρυθμούς μεταβολής στις δύο συντεταγμένες αυτό θα συμβαίνει όταν το σημείο είναι στην θέση $(-\ln 2, 1)$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι όταν είναι $x(t) = -\ln 2$ είναι $y(t) = 1$ και $y'(t) = x'(t)$ δηλαδή πράγματι στην θέση $(-\ln 2, 1)$ έχουμε ίσους ρυθμούς μεταβολής.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση και $g(x) = \ln(e^x - 1)$.

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

   6 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

   6 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και f έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

   6 Μονάδες

4. Έστω $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι $f'(x_0) \geq 0$.

   7 Μονάδες

Απαντησεις

1. Είναι $D_f = [0,1]$. Το D_g απαρτίζεται από τα x με $e^x - 1$ δηλαδή $e^x > 1$ δηλαδή $x > 0$. Επομένως $D_g = (0, +\infty)$. Είναι τώρα
$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

επομένως

$$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 0 \le \ln(e^x - 1) \le 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ e^0 \le e^{\ln(e^x-1)} \le e^1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 1 \le e^x - 1 \le e \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 2 \le e^x \le e+1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ \ln 2 \le x \le \ln(e+1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ln 2 \le x \le \ln(e+1)$$

Άρα

$$D_{f\circ g} = [\ln 2, \ln(e+1)]$$

2. Είναι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Rightarrow$$
$$\ln(e^{x_1} - 1) < \ln(e^{x_2} - 1) \underset{f\uparrow}{\Rightarrow}$$
$$f(\ln(e^{x_1} - 1)) < f(\ln(e^{x_2} - 1)) \Rightarrow$$
$$(f\circ g)(x_1) < (f\circ g)(x_2)$$

Επομένως η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα επομένως με πεδίο ορισμού το $[0,1]$. Επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το $[f(0), f(1)]$. Η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχης ως σύνθεση συνεχών με πεδίο ορισμού το $[\ln 2, \ln(e+1)]$. Επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$[(f\circ g)(\ln 2), (f\circ g)(\ln(e+1))] =$$
$$[f(g(\ln 2)), f(g(\ln(e+1)))] =$$
$$\left[f\left(\ln\left(e^{\ln 2} - 1\right)\right), f\left(\ln\left(e^{\ln(e+1)} - 1\right)\right)\right] =$$
$$[f(\ln(2-1)), f(\ln(e+1-1))] =$$
$$[f(\ln(1)), f(\ln(e))] =$$
$$[f(0), f(1)]$$

Άρα πράγματι οι $f\circ g$ και f έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

4. Αν $x < x_0$ τότε $f(x) < f(x_0)$ οπότε $x - x_0 < 0$ και $f(x) - f(x_0) < 0$ άρα $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$. Αλλά $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ επομένως $f'(x_0) \ge 0$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)f(x) + \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} = -2$

1. Να βρείτε το $f(1)$.

9 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{2013}{f(x_0)}$$

9 Μοναδες

3. Αν επιπλέον ισχύει

$$f^2(x) = 2 - f\left(x^2\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

7 Μοναδες

Απαντησεις

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω

$$h(x) = \frac{(x-1)f(x) + \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}, \quad x \neq 1$$

Είναι

$$\lim_{x\to 1} h(x) = -2$$

Λύνοντας ως προς $f(x)$ βρίσκουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

$$f(x) = \frac{h(x)\left(\sqrt{x}-1\right) - \eta\mu(x-1)}{x-1}$$

Επειδή η f είναι συνεχής έχουμε

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)\left(\sqrt{x}-1\right) - \eta\mu(x-1)}{x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to 1} h(x) \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \lim_{x\to 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$$

Αλλά

- $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \underset{x-1=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

Άρα $f(1) = (-2)\cdot\frac{1}{2} - 1 = -2$

2. Θέλουμε να υπάρχει x_0 στο $(0,1)$ ώστε

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{2013}{f(x_0)}$$

ή ισοδύναμα (μετά τις πράξεις) να ισχύει

$$(2x_0 - 1) f(x_0) - 2013 x_0 (x_0 - 1) = 0$$

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση

$$\sigma(x) = (2x-1) f(x) - 2013x(x-1)$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Έχουμε $\sigma(1)\sigma(0) = -f(1)f(0)$. Αλλά η συνεχής συνάρτηση f δεν έχει ρίζες άρα διατηρεί πρόσημο. Επομένως το γινόμενο $f(1)f(0)$ είναι θετικό και επομένως το γινόμενο $-f(1)f(0)$ είναι αρνητικό. Από το θεώρημα του Bolzano η σ έχει ρίζα x_0 στο $(0,1)$ και έχουμε το αποδεικτέο.

3. Παραγωγίζοντας την δοθείσα σχέση βρίσκουμε

$$2f'(x) f(x) = -2x f'\left(x^2\right)$$

Θετοντας $x = 0$ βρίσκουμε $f'(0) = 0$ και επομένως η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$ είναι η $y = f(0)$ δηλαδή η $y = -2$.