ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

Τάξη Γ′, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
16 Ιανουαρίου 2013

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$f(z)=\frac{i+z}{i-z}, \qquad z\in\mathbb{C}, \quad z\neq i$$

1. Να υπολογίσετε το

$$f\left(i^{11}\right)+f\left(i^{12}\right)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν $|f(z)|=1$ τότε $z\in\mathbb{R}$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των

$$0, \quad -1+2i, \quad f(-1+2i)$$

είναι ισοσκελές.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι αν $|z|<1$ τότε:

$$|f(z)|\leq\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w είναι γνωστό ότι:

- Η εικόνα του z ανήκει στην γραφική παράσταση $\mathcal{C}_1$ της συνάρτησης $f(x) = 2e^x \;\; x \in \mathbb{R}$.
- $4|w|^2 - (2\mathrm{Im}(w) - 1)^2 + 1 = 0$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο $\mathcal{C}_2$ των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

   6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ δεν έχουν κοινά σημεία.

   6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία που εφάπτεται στις καμπύλες $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$

   6 Μοναδες

4. Ένα σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται στην $\mathcal{C}_1$. Να βρεθεί σε ποια θέση του σημείου οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι ίσοι και διάφοροι του 0.

   7 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση και $g(x)=\ln(e^x-1)$.

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$.

   6 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

   6 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f\circ g$ και f έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

   6 Μονάδες

4. Έστω $x_0\in(0,1)$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι $f'(x_0)\geq 0$.

   7 Μονάδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)f(x) + \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x} - 1} = -2$

1. Να βρείτε το $f(1)$.

9 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{2013}{f(x_0)}$$

9 Μοναδες

3. Αν επιπλέον ισχύει

$$f^2(x) = 2 - f\left(x^2\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $A(0, f(0))$.

7 Μοναδες

Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία