Προτυπο Πειραματικο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
16 Ιανουαρίου 2014

Διδάσκοντες:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις[1]

ΘΕΜΑ 1

Για τον μιγαδικό αριθμό w είναι γνωστό ότι:

$$\left|w+\sqrt{2}i\right| = 2 + \left|w-\sqrt{2}i\right|$$

1. Να αποδείξετε ότι $w \neq 0$

   6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{2}\ \mathrm{Im}w = 1 + \left|w-\sqrt{2}i\right|$$

   6 Μοναδες

3. Να βρείτε τον w αν είναι γνωστό ότι $\mathrm{Re}w = 2$.

   6 Μοναδες

4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w

   7 Μοναδες

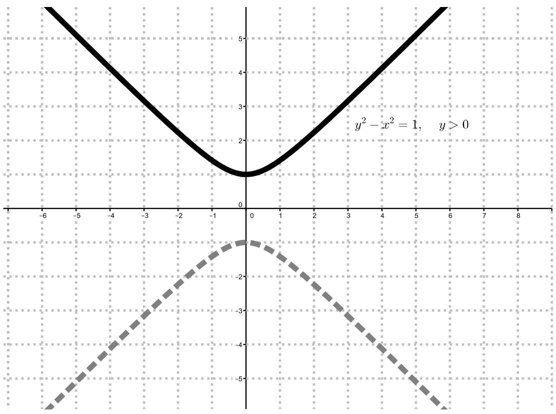
Απαντησεις

1. Αν ήταν $w = 0$ θα έπρεπε να είναι $\left|0+\sqrt{2}i\right| = 2 + \left|0-\sqrt{2}i\right|$ δηλαδή $\sqrt{2} = 2+\sqrt{2}$ (άτοπο). Άρα $w \neq 0$

2. Υψώνοντας την σχέση $\left|w+\sqrt{2}i\right| = 2 + \left|w-\sqrt{2}i\right|$ στο τετράγωνο έχουμε:
$\left|w+\sqrt{2}i\right|^2 = 4 + \left|w-\sqrt{2}i\right|^2 + 4\left|w-\sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$\left(w+\sqrt{2}i\right)\left(\bar{w}-\sqrt{2}i\right) = 4 + \left(w-\sqrt{2}i\right)\left(\bar{w}+\sqrt{2}i\right) + 4\left|w-\sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$w\bar{w} - \left(\sqrt{2}i\right)^2 - w\sqrt{2}i + \bar{w}\sqrt{2}i = 4 + w\bar{w} - \left(\sqrt{2}i\right)^2 - \bar{w}\sqrt{2}i + w\sqrt{2}i + 4\left|w-\sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-w\sqrt{2}i + \bar{w}\sqrt{2}i + \bar{w}\sqrt{2}i - w\sqrt{2}i = 4 + 4\left|w-\sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-2w\sqrt{2}i + 2\bar{w}\sqrt{2}i = 4 + 4\left|w-\sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-2\sqrt{2}i\left(w-\bar{w}\right) = 4 + 4\left|w-\sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-2\sqrt{2}i\left(2\mathrm{Im}w \cdot i\right) = 4 + 4\left|w-\sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$\sqrt{2}\mathrm{Im}w = 1 + \left|w-\sqrt{2}i\right|$

3. Αν $w = x + yi$ είναι $x = 2$. Από την ισότητα $\sqrt{2}\mathrm{Im}w = 1 + \left|w-\sqrt{2}i\right|$ έχουμε $2y = 1 + \left|2+yi-\sqrt{2}i\right|$ από την οποία συμπεραίνουμε αφενός ότι $y > 0$ και αφετέρου ότι $\sqrt{2}y = 1 + \left|2+yi-\sqrt{2}i\right|$ από την οποία έχουμε $\sqrt{2}y = 1 + \sqrt{2^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2}$ δηλαδή $\left(\sqrt{2}y-1\right)^2 = 2^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2$ και καταλήγουμε στην $y^2 - 5 = 5$ με ρίζες $y = \pm\sqrt{5}$ από τις οποίες η αρνητική απορρίπτεται και άρα $y = \sqrt{5}$ και $w = 2 + \sqrt{5}i$.

4. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\left|w+\sqrt{2}i\right| - \left|w-\sqrt{2}i\right| = 2$. Άρα η εικόνα του w είναι τέτοια ώστε η διαφορά των αποστάσεων της από τις εικόνες των $-\sqrt{2}i$ και $\sqrt{2}i$ να είναι ίση με 2. Άρα ανήκει σε υπερβολή με εστίες τα σημεία του $y'y$: $\left(0,\sqrt{2}\right),\left(0,-\sqrt{2}\right)$. Η υπερβολή θα έχει εξίσωση της μορφής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ με $2\alpha = 2$, $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ και $\gamma = \sqrt{2}$ δηλαδή εξίσωση την $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1$. Πρόκειται για την ισοσκελή υπερβολή $y^2 - x^2 = 1$. Επειδή είναι $y > 0$ ο γεωμετρικός τόπος θα είναι ο «άνω» κλάδος της υπερβολής.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x\left(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\right), \qquad x \in [0, 2\pi]$$

1. Να βρείτε το πρόσημο της f.

   7 Μοναδες

2. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1}{f(x)}$$

---
[1] Επιμέλεια απαντήσεων: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

6 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ισχύει
$$2\,(\eta\mu x)\,f\,(x) - (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\,f'\,(x) = 0$$
6 Μονάδες

4. Σε κάθε $x \in [0, 2\pi]$ αντιστοιχίζουμε την γωνία $\varphi\,(x)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $P(x, f(x))$ με τον $x'x$.
Με δεδομένο ότι η $\varphi\,(x)$ είναι παραγωγίσιμη βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της όταν $x = 0$.

6 Μονάδες

Απαντησεις

1. Η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Θα βρούμε πρώτα τις ρίζες της. Έχουμε:
$f\,(x) = 0 \Leftrightarrow e^x\,(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \underset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \underset{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Άρα ρίζες της f είναι εκείνοι οι αριθμοί του $[0, 2\pi]$ που είναι της μορφής $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Αλλά είναι
$\frac{\pi}{4} + k\pi \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq k\pi \leq 2\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{7}{4} \underset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k = 0$ ή $k = 1$
Επομένως η f έχει ρίζες τους $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$.
Αφού είναι συνεχής στα διαστήματα:
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$
στα οποία δεν έχει ρίζα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο που για να βρεθεί αρκεί να δοκιμάσουμε στην f ένα μόνο αριθμό από κάθε διάστημα. Είναι
   - $f\,(0) = e^0\,(0 - 1) = -1 < 0$ άρα στο πρώτο διάστημα η f είναι αρνητική.
   - $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\,(1 - 0) > 0$ άρα στο δεύτερο διάστημα η f είναι θετική
   - $f\,(2\pi) = e^{2\pi}\,(0 - 1) < 0$ και επομένως στο τρίτο διάστημα η f είναι αρνητική.

   Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f(x) < 0$ και $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f\,(x) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

2. Είναι $f'\,(x) = 2e^x\eta\mu x$ και επομένως $2\,(\eta\mu x)\,f\,(x) - (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\,f'\,(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,(\eta\mu x)\,e^x\,(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\,2e^x\eta\mu x = 0$ που ισχύει.

3. Ξέρουμε ότι
$\varepsilon\varphi\varphi\,(x) = f'\,(x)$ οπότε
$\varphi'\,(x)\,\varepsilon\varphi'\varphi\,(x) = f''\,(x)$
άρα $\varphi'\,(x)\,\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi(x)} = f''\,(x)$
ή αλλιώς $\varphi'\,(x) = \frac{f''(x)}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi(x)}$
επομένως $\varphi'\,(x) = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}$
Άρα $\varphi'\,(0) = \frac{f''(0)}{1+(f'(0x))^2} = 2$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x^3 + 2x - 2,\ \ x \in \mathbb{R}.$$
Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$.

5 Μονάδες

2. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

5 Μονάδες

3. Υπάρχει η αντίστροφη της f.

5 Μονάδες

4. Η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

5 Μονάδες

5. Η συνάρτηση $g(x) = f^{-1}(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

5 Μονάδες

Απαντησεις

1. $|f(x) - f(y)| = \left|\left(x^3 + 2x - 2\right) - \left(y^3 + 2y - 2\right)\right| =$
$= \left|(x - y)\left(x^2 + yx + y^2 + 2\right)\right| =$
$= |x - y|\left|x^2 + yx + y^2 + 2\right|$ Αλλά $x^2 + yx + y^2 \geq 0$ διότι είναι τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα $-3y^2 \leq 0$.
Επομένως:
$\left|(x - y)\left(x^2 + yx + y^2 + 2\right)\right| = |x - y|\left|x^2 + yx + y^2 + 2\right| = |x - y|\left(x^2 + yx + y^2 + 2\right) \geq 2\,|x - y|$ Άρα η αποδεικτέα ισχύει.

2. Η f είναι γνησίως αύξουσα διότι με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3$ και επομένως $x_1^3 + 2x_1 - 2 < x_2^3 + 2x_2 - 2$ δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Επίσης η f είναι συνεχής ως πολυώνυμο και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ άρα έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ που περιέχει το μηδέν άρα η f έχει ρίζα που λόγω μονοτονίας είναι μοναδική.

3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1 - 1$ άρα έχει αντίστροφη.

4. Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f επομένως το $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο τυχόν x_0 και επομένως είναι συνεχής. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Στην σχέση $|f(x) - f(y)| \geq 2\,|x - y|$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}\,(x)$ και όπου y το $f^{-1}\,(x_0)$. Θα έχουμε
$\left|f(f^{-1}\,(x)) - f(f^{-1}\,(x_0))\right| \geq 2\left|f^{-1}\,(x) - f^{-1}\,(x_0)\right|$
δηλαδή
$|x - x_0| \geq 2\left|f^{-1}\,(x) - f^{-1}\,(x_0)\right|$ άρα
$\left|f^{-1}\,(x) - f^{-1}\,(x_0)\right| \leq \frac{1}{2}\,|x - x_0|$ οπότε
$-\frac{1}{2}\,|x - x_0| \leq f^{-1}\,(x) - f^{-1}\,(x_0) \leq \frac{1}{2}\,|x - x_0|$ και επομένως
$-\frac{1}{2}\,|x - x_0| + f^{-1}\,(x_0) \leq f^{-1}\,(x) \leq \frac{1}{2}\,|x - x_0| + f^{-1}\,(x_0)$

Αλλά
$\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{2}\left|x-x_0\right|+f^{-1}\left(x_0\right)\right)$
$=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{2}\left|x-x_0\right|+f^{-1}\left(x_0\right)\right)=f^{-1}\left(x_0\right)$
και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}\left(x_0\right)$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο τυχόν x_0 άρα συνεχής.

5. Θεωρούμε $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $g\left(x_1\right) > g\left(x_2\right)$. Αντικαθιστούμε στην σχέση $|f(x)-f(y)| \geq 2|x-y|$ όπου x και y τα $f^{-1}\left(x_2\right)$ και $f^{-1}\left(x_1\right)$ αντιστοίχως και βρίσκουμε $|f(f^{-1}\left(x_2\right)) - f(f^{-1}\left(x_1\right))| \geq 2|f^{-1}\left(x_2\right) - f^{-1}\left(x_1\right)|$ δηλαδή ότι
$|x_2-x_1| > 2|f^{-1}\left(x_2\right)-f^{-1}\left(x_1\right)|$
Αλλά $|x_2-x_1| > 2|f^{-1}\left(x_2\right)-f^{-1}\left(x_1\right)| > |f^{-1}\left(x_2\right)-f^{-1}\left(x_1\right)| \geq f^{-1}\left(x_2\right)-f^{-1}\left(x_1\right)$
και αφού $|x_2-x_1| = x_2-x_1$ έχουμε ότι:
$x_2-x_1 > f^{-1}\left(x_2\right)-f^{-1}\left(x_1\right)$ δηλαδή:
$f^{-1}\left(x_1\right)-x_1 > f^{-1}\left(x_2\right)-x_2$ οπότε
$g\left(x_1\right) > g\left(x_2\right)$

ΘΕΜΑ 4

Έστω μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(1)=1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(1-x)$.

   6 Μονάδες

2. Έστω $a \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$h(x) = (x-a)^2 f(x)$$
είναι παραγωγίσιμη στο a

   6 Μονάδες

3. Έστω τυχόν $x \in (0,1)$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι
   - η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P(x, f(x))$, $A(1,0)$

   και
   - η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $B(1,1)$

   τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο M με τεταγμένη
$$r\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)+1-x}$$

   7 Μονάδες

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $r(x)$ του προηγουμένου ερωτήματος είναι γνησίως αύξουσα.

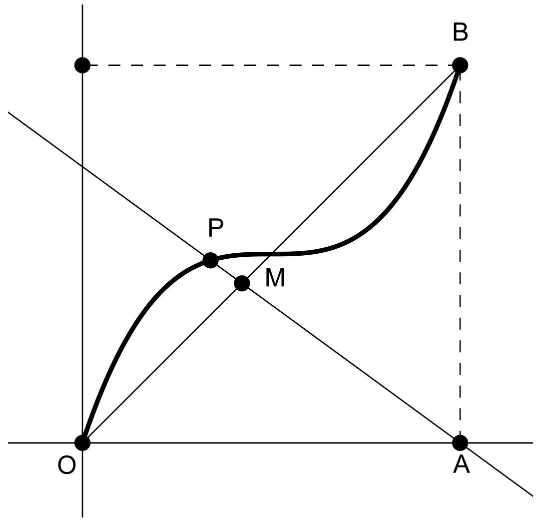
   6 Μονάδες

Απαντησεις

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(1-x)$ απαρτίζεται από τα x για τα οποία το $1-x$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f δηλαδή ισχύει $0 \leq 1-x \leq 1$. Η ανίσωση αυτή έχει λύσεις τα x με $0 \leq x \leq 1$. Άρα η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f το διάστημα $[0,1]$. Η g είναι σύνθεση συνεχών και επομένως είναι συνεχής. Τέλος έχουμε:
$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \underset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(1-x_1\right) > f\left(1-x_2\right) \Rightarrow g\left(x_1\right) > g\left(x_2\right)$
Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως το σύνολο τιμών της είναι το $\left[g\left(1\right), g\left(0\right)\right] = \left[f\left(1-1\right), f\left(1-0\right)\right] = \left[f\left(0\right), f\left(1\right)\right] = [0,1]$.

2. Ισχύει $\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)^2 f(x)-0}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\left(x-a\right)f(x) = 0\cdot f\left(a\right) = 0$ όπου χρησιμοποιήθηκε ότι η f είναι συνεχής. Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο a και $h'\left(a\right) = 0$.

3. (α΄) Έστω $M(p,q)$ τυχόν σημείο.



   - Το M θα ανήκει στην ευθεία των P, A αν και μόνο αν τα P, A, M είναι συνευθειακά δηλαδή αν και μόνο αν $\det\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν
$$\begin{vmatrix} x-1 & f\left(x\right) \\ p-1 & q \end{vmatrix} = 0$$
   που αναπτύσσοντας ισοδυναμεί με την
$$f\left(x\right)p - \left(x-1\right)q = f\left(x\right)$$
   - Το M θα ανήκει στην ευθεία των O, B που είναι η $y=x$ αν και μόνο αν
$$p = q$$

Το σημείο λοιπόν $M(p,q)$ ανήκει και στις δύο ευθείες αν το (p,q) είναι λύση του συστήματος (ως προς p, q):
$$\left.\begin{array}{l} f\left(x\right)p - \left(x-1\right)q = f\left(x\right) \\ p-q=0 \end{array}\right\}$$
Θα υπάρχουν δε τόσα κοινά σημεία όσες και λύσεις του συστήματος. Αντικαθιστώντας το $p=q$ στην πρώτη εξίσωση έχουμε την εξίσωση
$$\left(f\left(x\right)+1-x\right)q = f\left(x\right) \quad (*)$$

Για τον συντελεστή του q είναι $f(x)+1-x \geq 0$ (αφού λόγω μονοτονίας $f(x) \geq 0$ και $x \leq 1$). Επίσης για να είναι $f(x)+1-x=0$ πρέπει να ισχύει $f(x)=0$ και $x=1$ πράγμα αδύνατον. Άρα $f(x)+1-x>0$ και η εξίσωση $(*)$ έχει ακριβώς μία λύση $q=\frac{f(x)}{f(x)+1-x}$. Επομένως οι ευθείες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Η τεταγμένη του κοινού σημείου είναι

$$r(x)=\frac{f(x)}{f(x)+1-x}$$

(β′) Θέλουμε να δείξουμε ότι $r \uparrow$.
Θέλουμε με $0<x_1<x_2<1$ να είναι

$$r(x_1)<r(x_2).$$

Πράγματι
$r(x_1)<r(x_2) \Leftrightarrow$
$\underbrace{\frac{f(x_1)}{f(x_1)+1-x_1}}_{+}<\underbrace{\frac{f(x_2)}{f(x_2)+1-x_2}}_{+} \Leftrightarrow$
$f(x_1)(f(x_2)+1-x_2)<f(x_2)(f(x_1)+1-x_1) \Leftrightarrow$
$f(x_1)f(x_2)+f(x_1)-f(x_1)x_2<$
$<f(x_1)f(x_2)+f(x_2)-f(x_2)x_1 \Leftrightarrow$
$f(x_1)-f(x_1)x_2<f(x_2)-f(x_2)x_1 \Leftrightarrow$
$f(x_1)(1-x_2)<f(x_2)(1-x_1)$
Η τελευταία σχέση αληθεύει διότι μπορεί να προκύψει με πολλαπλασιασμό των ανισοτήτων $0<f(x_1)<f(x_2)$, $0<1-x_2<1-x_1$ που ισχύουν.