Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
9 Απριλίου 2014

Διδάσκοντες:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις[1]

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

6 Μονάδες

2. Να βρείτε τα ακρότατα της f και να εξετάσετε αν είναι ολικά.

6 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $x = 0$, $y = x$ είναι ασύμπτωτες της f.

6 Μονάδες

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 f(x)\,dx$.

7 Μονάδες

Απαντήσεις

1. Είναι $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ και επομένως η f' είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ και αρνητική στα $(-1,0)$, $(0,1)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο καθένα από τα διαστήματα $[-\infty,-1]$, $[1,+\infty]$ και γνησίως φθίνουσα στο καθένα από τα $[-1,0]$, $[0,1]$). Τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

2. Από τον προηγούμενο πίνακα φαίνεται ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο -1 το -2 και τοπικό ελάχιστο στο 1 το 2. Το -2 δεν αποτελεί ολικό μέγιστο αφού η f παίρνει και μεγαλύτερες τιμές λ.χ. το 2. Ούτε το 2 αποτελεί ολικό ελάχιστο αφού η f παίρνει και μικρότερες τιμές όπως το -2.

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ επομένως η ευθεία $x = 0$ αποτελεί κατακόρυφη ασύμπτωτη της f. Επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$ άρα η ευθεία $y = x$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της f τόσο στο $+\infty$ όσο και στο $-\infty$.

4. Είναι:
$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_2^3 = \frac{5}{2} + \ln 3 - \ln 2$

ΘΕΜΑ 2

Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ, ψ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = \varphi(x) + 1$$

$$\varphi'(x) - x\psi'(x) = \varphi(x) - x$$

και

$$\varphi(0) = 1, \qquad \psi(0) = 0$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(x+1)\,\varphi'(x) = (x+1)\,\varphi(x).$$

5 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι $\psi(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 Μονάδες

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των φ, ψ και τις ευθείες $x = 0$ και $x + y = e + 1$.

7 Μονάδες

Απαντήσεις

[1] Επιμέλεια απαντήσεων: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

1. Λύνουμε την πρώτη σχέση ως προς $\psi'(x)$ και βρίσκουμε
$\psi'(x) = \varphi(x) + 1 - \varphi'(x)$
αντικαθιστώντας στην δεύτερη σχέση έχουμε: $\varphi'(x) - x\varphi(x) - x + x\varphi'(x) = \varphi(x) - x$
οπότε:
$\varphi'(x) + x\varphi'(x) = \varphi(x) + x\varphi(x)$
άρα και
$(1+x)\varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$

2. Από την $(1+x)\varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$ έχουμε ότι για $x \neq -1$ είναι $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Εργαζόμενοι όπως σε γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε ότι για $x \neq -1$ είναι:
$\left(\frac{\varphi(x)}{e^x}\right)' = \frac{\varphi'(x)e^x - e^x\varphi(x)}{\varphi(x)} = 0$
Επομένως σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(-1,+\infty)$ η $\frac{\varphi(x)}{e^x}$ είναι σταθερή, Θα υπάρχουν λοιπόν αριθμοί c_1, c_2 ώστε

   - Για κάθε $x \in (-\infty,-1)$ να ισχύει $\frac{\varphi(x)}{e^x} = c_1$
   - Για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ να ισχύει $\frac{\varphi(x)}{e^x} = c_2$

   Μέχρι στιγμής ξέρουμε ότι

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 e^x & x < -1 \\ ; & x = 1 \\ c_2 e^x & x > -1 \end{cases}$$

   Θέτοντας όπου x το 0 βρίσκουμε ότι $c_2 = 1$ και επομένως για $x > -1$ είναι $\varphi(x) = e^x$. Αλλά η $\varphi(x) = e^x$ ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής επομένως:
$\lim\limits_{x\to -1^-} \varphi(x) = \varphi(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} \varphi(x)$ Δηλαδή:
$c_1 e^{-1} = \varphi(-1) = e^{-1}$
Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι $c_1 = 1$ και επομένως $\varphi(x) = e^x$ και για τα $x < -1$. Φυσικά $\varphi(x) = e^x$ και για το $x = -1$ λόγω της $\varphi(-1) = e^{-1}$. Τελικά $\varphi(x) = e^x$ ια όλα τα x.

3. Αντικαθιστώντας στην $\varphi'(x) + \psi'(x) = \varphi(x) + 1$ το $\varphi(x) = e^x$ βρίσκουμε ότι $\psi'(x) = 1$ και επομένως $\psi(x) = x + k$. Αλλά $\psi(0) = 0$ άρα $\psi(x) = x$ για κάθε x.

4. Από την γνωστή σχέση $\ln x \leq x - 1$ έχουμε $\ln e^x \leq e^x - 1$ δηλαδή ότι για όλα τα x ισχύει $e^x \geq x + 1$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι για όλα τα x ισχύει $e^x > x$. Άρα η $\mathcal{C}_\varphi$ είναι πάνω από την $\mathcal{C}_\psi$.
Το σημείο τομής A της $\mathcal{C}_\varphi$ με την ευθεία $x + y = e + 1$ βρίσκεται αν λύσουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ x + y = e + 1 \end{array}\right\}$$

   η επίλυση του οποίου ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης:

$$x + e^x = e + 1$$

   που με την σειρά της ανάγεται στην εύρεση των ριζών της συνάρτησης

$$r(x) = x + e^x - e - 1$$

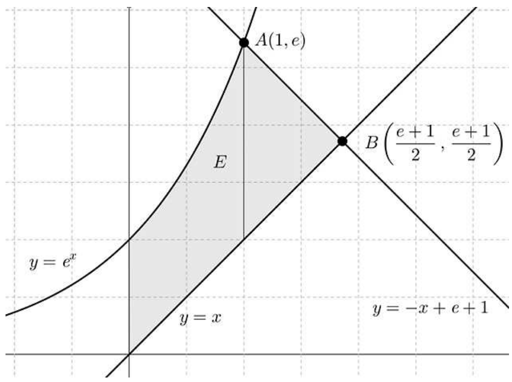
   Η συνάρτηση αυτή έχει προφανή ρίζα το 1 και αφού

$$r'(x) = 1 + e^x > 0$$

   η r είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα είναι μοναδική. Άρα $x = 1$, $y = e$ και είναι $A(1, e)$.
Το σημείο τομής B της $\mathcal{C}_\psi$ με την ευθεία $x + y = e + 1$ βρίσκεται αν λύσουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ x + y = e + 1 \end{array}\right\}$$

   από το οποίο εύκολα προκύπτει ότι $B\left(\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}\right)$.



   Για το ζητούμενο εμβαδόν E έχουμε:
$E = \int_0^1 (\varphi(x) - x)\,dx + \int_1^{\frac{e+1}{2}} (-x + e + 1 - x)\,dx =$
$\int_0^1 (e^x - x)\,dx + \int_1^{\frac{e+1}{2}} (-x + e + 1 - x)\,dx =$
$\left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-x^2 + ex + x\right]_1^{\frac{e+1}{2}} = \frac{1}{2}e - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}e^2$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = x - \ln x$$

1. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή.

   5 Μονάδες

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία $y = ax + b$ ώστε

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - ax - b) = 0.$$

   5 Μονάδες

3. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 1$.

   5 Μονάδες

4. Να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της g που απέχει από το σημείο $A(1,0)$ ελάχιστη απόσταση.

   5 Μονάδες

5. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση δύο φορές παργωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(x) > 1$ και $f''(x) > 0$ για κάθε x. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι κυρτή.

   5 Μονάδες

Απαντησεις

Απαντησεις

1. Η g ορίζεται στο $(0,+\infty)$. Είναι:
$g(x) = x - \ln x$
$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$
$g''(x) = \frac{1}{x^2}$
Άρα $g''(x) > 0$ γιά κάθε $x \in (0,+\infty)$ και επομένως η g είναι κυρτή.

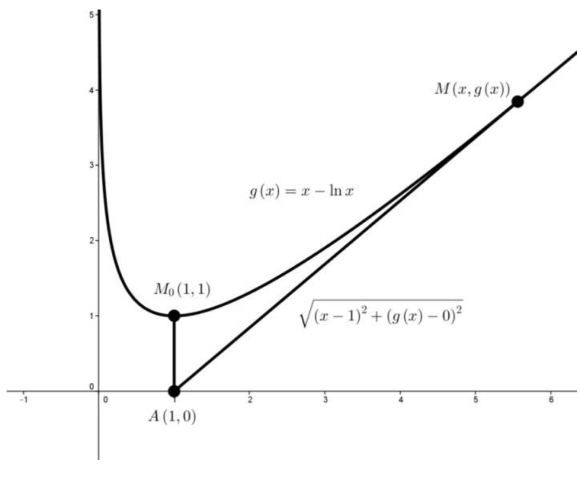
2. Αν μία τέτοια ευθεία υπάρχει θα πρέπει να είναι ασύμπτωτη της g στο $+\infty$. Τότε
$a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ και
$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - ax) = \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x)$
Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = -\infty$ ενώ πρέπει $b \in \mathbb{R}$.
Επομένως δεν υπάρχει ευθεία με αυτή την ιδιότητα.

3. Είναι $g(x) = 1 \Leftrightarrow x - \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = x - 1$.
Όμως γνωρίζουμε ότι για όλα τα $x > 0$ ισχύει $\ln x \le x - 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.
Άρα η εξίσωση $g(x) = 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

4. Έστω τυχόν σημείο $M(x, g(x))$ της $\mathcal{C}_g$. Θέλουμε η απόσταση του $\sqrt{(x-1)^2 + (g(x)-0)^2}$ από το $A(1,0)$ να είναι ελάχιστη. Αρκεί το υπόρριζο να γίνει ελάχιστο δηλαδή η $s(x) = (x-1)^2 + g(x)^2$, $x > 0$ να γίνει ελάχιστη.
$s'(x) = 2\frac{2x^2-2x-(\ln x)x+\ln x}{x} = \frac{2(x-1)(2x-\ln x)}{x}$
Επειδή για θετικά x είναι $2x > x > x - 1 \ge \ln x$ ο παράγοντας $2x - \ln x$ είναι θετικός άρα το πρόσημο της $s'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $x - 1$. Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής της $s(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$s'(x)$	$-$	0	$+$
$s(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως η $s(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x = 1$ και το σημείο το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από το A είναι το $M_0(1, g(1))$ δηλαδή το $M - 0(1,1)$.



5. Έχουμε: $(g \circ f)(x) = f(x) - \ln f(x)$
$(g \circ f)'(x) = f\prime(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}$
$(g \circ f)''(x) = f''(x) - \frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)} =$
$\frac{f''(x)f^2(x)-f''(x)f(x)+(f'(x))^2}{f^2(x)} =$
$\frac{\overbrace{f''(x)}^{+}\overbrace{(f(x)-1)}^{+}\overbrace{f(x)}^{+}+\overbrace{(f'(x))^2}^{\geq 0}}{f^2(x)} > 0$
Άρα η $g \circ f$ είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

- $e^{-f(x)} f'(x) = 2 - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $f(x) \neq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να δειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

5 Μοναδες

2. Να δειχθεί ότι η $f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 Μοναδες

3. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

5 Μοναδες

4. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα-κυρτά και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία της $\mathcal{C}_f$ με αρνητικές τετμημένες.

5 Μοναδες

5. Δίνεται επιπλέον ότι η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$.
Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι ισχύει:
$$f^{-1}(x) = \int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u} du, \quad x \in (-\infty, 2)$$

5 Μοναδες

Απαντησεις

1. Είναι $e^{-f(x)} f'(x) = 2 - f(x)$ και επομένως $f'(x) = \frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}$. Η συνάρτηση $\frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων επομένως και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη. Άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

2. Η $2 - f(x)$ ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Αφού είναι ορισμένη σε διάστημα και δεν έχει ρίζα διατηρεί πρόσημο. Είναι $2 - f(0) = 1 > 0$. Άρα η $2 - f(x)$ είναι παντού θετική και $f(x) < 2$.

3. Από την $f'(x) = \frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}$ και το γεγονός ότι $2 - f(x) > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

4. Έχουμε $f''(x) = \left(\frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}\right)' = \frac{-f'(x)e^{-f(x)}-(-f'(x))e^{-f(x)}(2-f(x))}{e^{-2f(x)}} = \frac{-f'(x)e^{-f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}(2-f(x))}{e^{-2f(x)}} = \frac{f'(x)e^{-f(x)}(1-f(x))}{e^{-2f(x)}}$
Για $x<0$ είναι $f(x)<f(0)=1$ και για $x>0$ είναι $f(x)>f(0)=1$. Άρα στο $(-\infty,0]$ είναι $f''(x)>0$ και επομένως η f είναι κυρτή ενώ στο $[0,+\infty)$ είναι $f''(x)<0$ και η f είναι κοίλη.
Έστω τώρα $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $C(x_3,f(x_3))$ τρία σημεία της $\mathcal{C}_f$ με αρνητικές τετμημένες $x_1<x_2<x_3<0$.
Για τους συντελεστές διευθύνσεως των AB, BC έχουμε
$\lambda_{AB} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \underset{\Theta\text{MT}}{=} f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1,x_2)$
$\lambda_{BC} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \underset{\Theta\text{MT}}{=} f'(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_2,x_3)$
Αλλά αφού η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα και επομένως με $\xi_1<x_2<\xi_2$ είναι $f'(\xi_2)$ άρα $\lambda_{AB}<\lambda_{BC}$ και τα A,B,C δεν είναι συνευθειακά.

5. Η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $1-1$ άρα και αντιστρέψιμη.
Υποθέτουμε τώρα ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,2)$ και θα δείξουμε ότι η αντίστροφη της είναι η $\int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u}du$, $x\in(-\infty,2)$.
Α Τρόπος: Από την υπόθεση έχουμε για κάθε t είναι:
$\frac{e^{-f(t)}f'(t)}{2-f(t)} = 1$.
Επομένως και
$\int_0^x \frac{e^{-f(t)}f'(t)}{2-f(t)}dt = \int_0^x 1dt$.
Αλλάζουμε μεταβλητή θέτοντας $u=f(x)$ και έχουμε:
Άρα έχουμε εκφράσει το x συναρτήσει του $y=f(x)$:
$\int_1^y \frac{e^{-u}}{2-u}dt = x$.
Άρα έχουμε βρεί ότι:
$f^{-1}(x) = \int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u}du, \quad x\in(-\infty,2)$
Β Τρόπος: Θεωρούμε την συνάρτηση
$g(x) = \int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u}du, \quad x\in(-\infty,2)$.
Έστω $x\in\mathbb{R}$. Τότε $f(x)\in(-\infty,2)$. Επομένως ορίζεται η $g\circ f$.
Είναι $(g\circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)) = f'(x)\frac{e^{-f(x)}}{2-f(x)} = 1 = (x)'$.
Επομένως $(g\circ f)(x) = x+c$.
Αλλά $(g\circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$. Άρα $c=0$ και επομένως:
$(g\circ f)(x) = x, \quad x\in\mathbb{R}$
Οι g και f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού: το $(-\infty,2)$.
Επίσης αν $x\in(-\infty,2)$ τυχόν τότε
$(g\circ f)(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$ και επομένως $g(x) = f^{-1}(x)$ άρα $g=f^{-1}$.