Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
16 Ιανουαρίου 2014

Διδάσκοντες:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σ. Χασάπης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις[1]

ΘΕΜΑ 1

Έστω $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει:
$$9f(x) - 3xf'(x) - f''(x) = 9.$$
6 Μονάδες

2. Να αποδείξετε η f είναι γνησίως αύξουσα.
6 Μονάδες

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
6 Μονάδες

4. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = f(x)$.
7 Μονάδες

Απαντήσεις

1. Είναι $f(x) = x^3 + x + 1$, $f'(x) = 3x^2 + 1$ και $f''(x) = 6x$. Επομένως:
$9f(x) - 3xf'(x) - f''(x) = 9\left(x^3 + x + 1\right) - 3x\left(3x^2 + 1\right) - 6x = 9$

2. Αν $x_1 < x_2$ τότε και $x_1^3 < x_2^3$ οπότε $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$ και $x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1$ δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών $f((-\infty, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$.

4. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$. Άρα έχουμε τις ισοδυναμίες:
$(f \circ f)(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x^3 + x + 1 = x \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = -1$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύουν:

- $\left|z - \frac{1}{4}\right| = \operatorname{Re}(z) + \frac{1}{4}$
- $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 0$

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η καμπύλη:
$$y = \sqrt{x}, \qquad x > 0.$$
8 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι $\left|z - \frac{13}{2}\right| \geq \frac{5}{2}$.
8 Μονάδες

3. Αν, επιπλέον, ισχύει
$$z^2 - |z|^2 = 2(z - \bar{z})(2 + i)$$
να βρείτε τον z.
9 Μονάδες

Απαντήσεις

1. Θέτουμε $z = x + yi$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $xy > 0$. Είναι:
$$\left|z - \frac{1}{4}\right| = \operatorname{Re}(z) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\left|x + yi - \frac{1}{4}\right| = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2} = x + \frac{1}{4} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$
$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2}^{\,2} = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$
$$y^2 = x \overset{(**)}{\Leftrightarrow}$$
$$y = \sqrt{x},\ x > 0.$$
Η ισοδυναμία $(**)$ ισχύει διότι τα x, y πρέπει να είναι ομόσημα και λόγω της $y^2 = x$ είναι $x > 0$. Η συνεπαγωγή $(*)$ αν $y = \sqrt{x}, x > 0$ είναι ισοδυναμία επομένως από την υπόθεση $y = \sqrt{x}, x > 0$ προκύπτει η $\left|z - \frac{1}{4}\right| = \operatorname{Re}(z) + \frac{1}{4}$.

[1] Επιμέλεια απαντήσεων: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

2. Έχουμε:

$$\left|z - \frac{13}{2}\right| \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left|x + \sqrt{x}i - \frac{13}{2}\right| \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 12x + \frac{169}{4} \geq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 12x + 36 \geq 0$$

$$(x-6)^2 \geq 0.$$

   Η τελευταία σχέση ισχύει επομένως ισχύει και η αποδεικτέα.

3. Η σχέση $z^2 - |z|^2 = 2(z - \bar{z})(2+i)$ μας δίνει την $\left(x + \sqrt{x}i\right)^2 - \sqrt{x^2 + \sqrt{x}^2}^2 = 2\left(2i\sqrt{x}\right)(2+i)$ από την οποία προκύπτει ότι $-2x + 2ix\sqrt{x} = -4\sqrt{x} + 8i\sqrt{x}$ που μας δίνει τις $-2x = -4\sqrt{x}$ και $2x\sqrt{x} = 8\sqrt{x}$ που, αφού $x > 0$, επαληθεύονται για $x = 4$. Άρα $y = \sqrt{4} = 2$ και $z = 4 + 2i$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 1$, έτσι ώστε

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = k \in \mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2$.

   5 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

   5 Μονάδες

3. Έστω ότι $k = \frac{3}{4}$.

   (α′) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M(1,2)$.

   5 Μονάδες

   (β′) Ένα σημείο K με τετμημένη μικρότερη του 1 κινείται στην εφαπτομένη (ε). Αν η τετμημένη του K αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $\frac{2m}{\sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OKM (O η αρχή των αξόνων).

   5 Μονάδες

Απαντησεις

1. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1}$, $x \neq 1$. Θα είναι $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = k$ και $f(x) = (x-1)g(x) + \sqrt{x+3}$. Άρα αφού η f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)g(x) + \sqrt{x+3}\right) = 0 \cdot k + \sqrt{1+3} = 2$.

2. Είναι $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)g(x)+\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{\sqrt{x+3}^2-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) = k + \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

3. (α′) Αφού $k = \frac{3}{4}$ η παράγωγος της f στο 1 είναι $f'(1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ επομένως η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M(1,2)$ θα είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ που γίνεται $y - 2 = 1 \cdot (x-1)$ δηλαδή $y = x + 1$.

   (β′) Αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης της τετμημένης του σημείου K και $y(t)$ η συνάρτηση θέσης της τεταγμένης είναι $y(t) = x(t) + 1$ και $x'(t) = \frac{2m}{\sec}$. Το τρίγωνο OKM έχει εμβαδόν

$$E(t) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x(t) & x(t)+1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|x(t) - 1| = \frac{1}{2}(1 - x(t))$$

   Επομένως $E'(t) = -\frac{1}{2}x'(t) = -\frac{1m^2}{\sec}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = x^{2015}$ και
- $g(x) = 1 - x^n$ όπου n θετικός ακέραιος.

1. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

   8 Μονάδες

2. Για τον ξ του ερωτήματος 1.

   (α′) Να αποδείξετε ότι $\xi > \frac{1}{2}$.

   7 Μονάδες

   (β′) Έστω διάστημα (α, β) τέτοιο ώστε:

   - $(\alpha, \beta) \subseteq (0,1)$
   - $\xi \in (\alpha, \beta)$

   Να αποδείξετε ότι

$$\left(f(\alpha) - g(\alpha)\right)\left(f(\beta) - g(\beta)\right) < 0.$$

   6 Μονάδες

3. Έστω ότι $n < 3$. Υποθέτουμε ότι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z ανήκει στο χωρίο που περικλείεται μεταξύ των των θετικών ημιαξόνων Ox, Oy και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g. Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 1$.

Απαντησεις

1. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) - g(\xi) = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = x^{2015} + x^n - 1$. Αυτή ως πολυωνυμική είναι συνεχής και ακόμη $h(0)h(1) = -1$ επομένως από το θεώρημα του Bolzano έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (0,1)$,

   Έστω $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$. Αφού είναι θετικοί αριθμοί θα είναι $x_1^{2015} < x_2^{2015}$ και $x_1^n < x_2^n$ άρα $x_1^{2015} + x_1^n - 1 < x_2^{2015} + x_2^n - 1$ δηλαδή $h(x_1) < h(x_2)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα της $\xi \in (0,1)$ είναι μοναδική.

2. (α΄) Για τον ξ ισχύει $h(\xi) = 0$ δηλαδή $\xi^{2005} + \xi^n = 1$. Ας υποθέσουμε ότι $\xi \leq \frac{1}{2}$. Τότε $\xi^{2005} + \xi^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2005} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2005} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (άτοπο). Άρα $\xi > \frac{1}{2}$.

   (β΄) Έχουμε $0 < \alpha < \xi < \beta < 1$ και από τη μονοτονία της $h(x) = f(x) - g(x)$ έχουμε $h(\alpha) < h(\xi) < h(\beta)$ δηλαδή $f(\alpha) - g(\alpha) < 0 < f(\beta) - g(\beta)$ άρα $(f(\alpha) - g(\alpha))(f(\beta) - g(\beta)) < 0$.

3. Είδαμε ότι με $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$ είναι $x_1^n < x_2^n$ και επομένως $-x_1^n > -x_2^n$ άρα $1 - x_1^n > 1 - x_2^n$ και επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού είναι συνεχής και $g(0) = 1$, $g(1) = 0$ το σύνολο τιμών της θα είναι το $[0,1]$. Έστω $z = x + yi$. Θα είναι $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq g(x)$. Άρα $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + g(x)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - x^n)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^n + x^{2n}}$. Θέλουμε $|z| \leq 1$ δηλαδή θέλουμε να ισχύει $\sqrt{x^2 + 1 - 2x^n + x^{2n}} \leq 1$ ή ισοδύναμα $x^2 + 1 - 2x^n + x^{2n} \leq 1$ και τελικά

   $$x^2 - 2x^n + x^{2n} \leq 0 \quad (\#).$$

   Αφού $n < 3$ θα είναι $n = 1$ ή $n = 2$.

   - Για $n = 1$ η $(\#)$ γίνεται $2x(x-1) \leq 0$ που ισχύει.
   - Για $n = 2$ η $(\#)$ γίνεται $x^2(x-1)(x+1) \leq 0$ που πάλι ισχύει.

   Τελικά για $n < 3$ ισχύει $|z| \leq 1$.