Προτυπο Πειραματικο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Τάξη Γ΄, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
19 Ιανουαρίου 2015

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σ. Χασάπης

ΘΕΜΑ 1

Έστω $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει:

$$9f(x) - 3xf'(x) - f''(x) = 9.$$

6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε η f είναι γνησίως αύξουσα.

6 Μοναδες

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

6 Μοναδες

4. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = f(x)$.

7 Μοναδες

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύουν:

- $\left|z-\frac{1}{4}\right| = \mathrm{Re}\,(z)+\frac{1}{4}$
- $\mathrm{Re}\,(z)\cdot \mathrm{Im}\,(z) > 0$

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η καμπύλη:
$$y=\sqrt{x}, \qquad x>0.$$

8 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι $\left|z-\frac{13}{2}\right| \geq \frac{5}{2}$.

8 Μονάδες

3. Αν, επιπλέον, ισχύει
$$z^2-|z|^2 = 2\,(z-\bar{z})\,(2+i)$$
να βρείτε τον z.

9 Μονάδες

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 1$, έτσι ώστε

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = k \in \mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2$.

6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

6 Μοναδες

3. Έστω ότι $k = \frac{3}{4}$.

(α΄) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M(1,2)$.

6 Μοναδες

(β΄) Ένα σημείο K με τετμημένη μικρότερη του 1 κινείται στην εφαπτομένη (ε). Αν η τετμημένη του K αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $\frac{2m}{\text{sec}}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OKM (O η αρχή των αξόνων).

7 Μοναδες

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = x^{2015}$ και
- $g(x) = 1 - x^n$ όπου n θετικός ακέραιος.

1. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

8 Μονάδες

2. Για τον ξ του ερωτήματος 1.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $\xi > \frac{1}{2}$.

7 Μονάδες

   (β΄) Έστω διάστημα (α, β) τέτοιο ώστε:

   - $(\alpha, \beta) \subseteq (0,1)$
   - $\xi \in (\alpha, \beta)$

   Να αποδείξετε ότι

$$(f(\alpha) - g(\alpha))(f(\beta) - g(\beta)) < 0.$$

6 Μονάδες

3. Έστω ότι $n < 3$. Υποθέτουμε ότι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z ανήκει στο χωρίο που περικλείεται μεταξύ των θετικών ημιαξόνων Ox, Oy και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g. Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 1$.

4 Μονάδες

Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία