Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
28 Απριλίου 2015

Διδάσκοντες:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σ. Χασάπης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις[1]

ΘΕΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

   6 Μοναδες

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της.

   6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < 1$ ισχύει
$$f(x) \le 6$$

   6 Μοναδες

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

   7 Μοναδες

Απαντησεις

1. Είναι $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ και $f''(x) = 12x - 18$. Οι ρίζες και τα πρόσημα των f' και f'' , τα διαστήματα μονοτονίας και τα διαστήματα όπου η f είναι κοίλη ή κυρτή απεικονίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	$\frac{11}{2}$	↘	5	↗	$+\infty$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Η f παρουσιάζει στα 1 και 2 αντιστοίχως τοπικό μέγιστο $f(1) = 6$ και τοπικό ελάχιστο $f(2) = 5$ που δεν είναι ολικά. Επίσης στο $\frac{3}{2}$ παρουσιάζει καμπή με αντίστοιχο σημείο καμπής το $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

2. Παίρνοντας τα σύνολα τιμών της f στα διατήματα που είναι γνησίως μονότονη βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι $f(\mathbb{R}) = f((-\infty,1]) \cup f([1,2]) \cup f([2,+\infty)) = (-\infty,6] \cup [5,6] \cup [5,+\infty) = \mathbb{R}$. Στο διάστημα $(-\infty,6]$ η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα η οποία λόγω μονοτονίας είναι μοναδική ενώ στα $[5,6], [5,+\infty)$ δεν έχει ρίζα. Επομένως η f έχει ακριβώς μία ρίζα.

3. Στο $(-\infty,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως αν $x \le 1$ θα είναι $f(x) \le f(1)$ άρα $f(x) \le 6$.

4. Για $0 \le x \le 1$ λόγω της μονοτονίας της f είναι $f(0) \le f(x)$και επομένως $1 \le f(x)$. Άρα στο $[0,1]$ η f παίρνει θετικές τιμές και το ζητούμενο εμβαδόν είναι δηλαδή $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 + x\right]_0^1 = \frac{9}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$f(0) = f'(0) = 2$

$f(x+y) = \frac{1}{2} f(x) f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

   8 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

   8 Μοναδες

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

   9 Μοναδες

Απαντησεις

1. Έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{1}{2}f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h} = \frac{1}{2} f(x_0) \lim_{h\to0} \frac{f(h)-2}{h-0}$. Αλλά $\lim_{h\to0} \frac{f(h)-2}{h-0} = \lim_{h\to0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = f'(0) = 2$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x_0) = f(x_0)$ για όλα τα x_0. Αλλά οι συναρτήσεις που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f' = f$ είναι της μορφής ce^x

[1]Επιμέλεια απαντήσεων: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

2. Από το προηγούμενο ισχύει $f'(x) = f(x)$ για όλα τα x άρα $f(x) = ce^x$. Θέτοντας $x = 0$ βρίσκουμε $f(x) = 2e^x$.

3. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες βρίσκουμε: $\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 2xe^x dx = \int_0^1 2x(e^x)'\,dx = [2xe^x]_0^1 - \int_0^1 (2x)' e^2 dx = [2xe^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = 2$.

ΘΕΜΑ 3

Για τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι:

1. $f(x) = (\ln(e^x + 1) - x)'$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) - (e^x + 1)g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. $g(0) = \frac{1}{2}$

1. Να βρείτε την f.

3 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

8 Μονάδες

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g.

6 Μονάδες

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 g(x)\,dx < 1$$

8 Μονάδες

Απαντησεις

1. $f(x) = (\ln(e^x + 1) - x)' = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} - 1 = \frac{e^x}{e^x+1} - 1 = -\frac{1}{e^x+1}$

2. Η δοθείσα σχέση αν διαιρέσουμε με $e^x + 1$ ισοδύναμα γράφεται $g'(x) - \frac{1}{e^x+1}g(x) = 0$ δηλαδή

$$g'(x) + r'(x)g(x) = 0$$

όπου $r(x) = \ln(e^x + 1) - x$. Πολλαπλασιάζοντας με $e^{r(x)}$ έχουμε την ισοδύναμη σχέση $e^{r(x)}g'(x) + r'(x)e^{r(x)}g(x) = 0$ δηλαδή την $\left(e^{r(x)}g(x)\right)' = 0$. Άρα $e^{r(x)}g(x) = k$ και επομένως $e^{\ln(e^x+1)-x}g(x) = k$ δηλαδή $\frac{e^x+1}{e^x}g(x) = k$. Θέτοντας $x = 0$ βρίσκουμε $k = 1$ και επομένως $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

3. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επομένως το όριο της σε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό είναι η τιμή της σε αυτόν άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

για $x \to +\infty$ Βρίσκουμε τα $\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{e^x}\right)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1+0} \cdot 0 = 0$ και $\beta = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{e^x}\right)} = 1$ και έχουμε ότι η $y = \alpha x + \beta$ δηλαδή η $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της g στο $+\infty$.

για $x \to -\infty$ Με $\alpha = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \frac{1}{x} = 0$ και $\beta = \lim_{x\to-\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$ η $y = \alpha x + \beta$ δηλαδή ο $x'x$ είναι ασύμπτωτη της g για $x \to -\infty$.

4. **Α' Τρόπος** Είναι $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ και επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα για $0 \le x \le 1$ είναι

$$g(0) \underset{(*)}{\le} g(x) \underset{(**)}{\le} g(1)$$

και η $(*)$ ισχύει σαν ισότητα μόνο όταν $x = 0$ ενώ η $(**)$ ισχύει σαν ισότητα μόνο αν $x = 1$. Άρα για όλα τα $x \in [0,1]$ ισχύει $g(x) - \frac{1}{2} \ge 0$ και $\frac{e}{e+1} - g(x) \ge 0$ χωρίς η ισότητα να ισχύει για όλα τα x. Άρα $\int_0^1 \left(g(x) - \frac{1}{2}\right)dx > 0$ και $\int_0^1 \left(\frac{e}{e+1} - g(x)\right)dx > 0$ από τις οποίες έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{2}dx < \int_0^1 g(x)\,dx < \int_0^1 \frac{e}{e+1}dx$ και επομένως $\frac{1}{2}x < \int_0^1 g(x)\,dx < \frac{e}{e+1}$. Αλλά $\frac{e}{e+1} < 1$ και έχουμε το αποδεικτέο.

Β' Τρόπος Θέτουμε $u = e^x + 1$ και $e^x dx = du$ και έχουμε $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int_2^{e+1} \frac{1}{u}du = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$. Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι $\frac{1}{2} < \ln\frac{e+1}{2} < 1$ ή ισοδύναμα $\sqrt{e} < \frac{e+1}{2} < e$ που ισχύει αφού $e = 2,71$.

Γ' Τρόπος Έστω G οποιαδήποτε παράγουσα της g. Είναι $\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = \frac{G(1)-G(0)}{1-0} = G'(\xi)$, $\xi \in (0,1)$ από το θεώρημα μέσης τιμής για την G στο $[0,1]$. Θέλουμε $\frac{1}{2} < G'(\xi) < 1$ δηλαδή $\frac{1}{2} < \frac{e^\xi}{e^\xi+1} < 1$. Για το πρώτο σκέλος $\frac{1}{2} < \frac{e^\xi}{e^\xi+1}$ θέλουμε $e^\xi + 1 < 2e^\xi$ δηλαδή $1 < e^\xi$ που ισχύει αφού $\xi > 0$. Το δεύτερο σκέλος $\frac{e^\xi}{e^\xi+1} < 1$ είναι προφανές.

ΘΕΜΑ 4

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t - t - 1}dt = \frac{x-1}{e-2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$.

7 Μονάδες

2. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3 Μονάδες

3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(1, f(1))$.

7 Μονάδες

4. Αν $a > 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, a)$ έτσι ώστε

$$\int_a^{x_0} f(t)\,dt = x_0 - f(x_0)$$

8 Μοναδες

Απαντησεις

1. Κατ αρχάς θα χρειασθεί να βρούμε το πεδίο ορισμού της $\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t-t-1}dt$. Πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{e^t-t-1}$. Με $h(t) = e^t - t - 1$ είναι $h'(t) = e^t - 1$ και επομένως $h'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$ και $h'(t) < 0 \Leftrightarrow t < 0$. Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και επομένως έχει ελάχιστο στο 0 το 0. Είναι $h(t) > 0$ για $t \neq 0$ και $h(0) = 0$. Άρα ο ολοκληρωτέος $\frac{1}{e^t-t-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Για ν ορίζεται το ολοκλήρωμα πρέπει αμφότερα τα άκρα του να ανήκουν σε μόνο από τα διαστήματα που απαρτίζουν το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{e^t-t-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Επειδή το άκρο 1 ανήκει στο $(0, +\infty)$ θα πρέπει και το άλλο άκρο $f(x)$ να ανήκει και αυτό στο $(0, +\infty)$. Άρα $f(x) > 0$.

2. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t-t-1}dt$ είναι παραφωγίσιμη ως σύνθεση των $\int_1^{x} \frac{1}{e^t-t-1}dt, f(x)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $\left(\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t-t-1}dt\right)' = \left(\frac{x-1}{e-2}\right)'$ και επομένως $f'(x)\frac{1}{e^{f(x)}-f(x)-1} = \frac{1}{e-2}$. Επειδή $f(x) > 0$ είναι $e^{f(x)} - f(x) - 1 > 0$ και αφού $\frac{1}{e-2} > 0$ είναι και $f'(x) > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Είναι $f'(x) = \frac{1}{e-2}\left(e^{f(x)} - f(x) - 1\right)$ και επομένως
$$f''(x) = \frac{1}{e-2} f'(x)\left(e^{f(x)} - 1\right).$$
Αφού $f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ το β′ μέλος της παραπάνω ισότητας είναι θετικό άρα $f''(x) > 0$ και η f είναι κυρτή.
Για να βρούμε την ζητούμενη εφαπτομένη θα βρούμε πρώτα το $f(1)$. Είναι $\int_1^{f(1)} \frac{1}{e^t-t-1}dt = 0$. Επειδή $\frac{1}{e^t-t-1} > 0$ αν ήταν $f(1) > 1$ θα είχαμε $\int_1^{f(1)} \frac{1}{e^t-t-1}dt > 0$. Αν ήταν $f(1) < 1$ θα είχαμε $\int_1^{f(1)} \frac{1}{e^t-t-1}dt = -\int_{f(1)}^1 \frac{1}{e^t-t-1}dt < 0$. Άρα $f(1) = 1$. Επίσης $f'(1) = \frac{1}{e-2}\left(e^{f(1)} - f(1) - 1\right) = \frac{1}{e-2}(e-2) = 1$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ δηλαδή ή $y = x$.

4. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - x + f(x)$ στο $[a, 1]$.

   $g(1) = \int_a^1 f(t)\,dt - 1 + f(1) = \int_a^1 f(t)\,dt > 0$ αφού $f(t) > 0$ στο $[a, 1]$.

   $g(a) = \int_a^a f(t)\,dt - a + f(a) = f(a) - a$. Αλλά αφού η f είναι κυρτή κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημαείο οποιασδήποτε εφαπτομένης της εκτός αν αυτό είναι το σημείο επαφής. Άρα για την εφαπτομένη στο $(1, 1)$ αφού $a < 1$ είναι $f(a) > a$ και $g(a) > 0$.

Από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0 \in (a, 1)$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0$ δηλαδή $\int_a^{x_0} f(t)\,dt = x_0 - f(x_0)$.