Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τμήματα Γ1, Γ2, Γ3 Θετικής - Γ Οικονομίας, Πληροφορικής
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
18 Ιανουαρίου 2016

Διδάσκοντες:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις[1]

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

1. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

   7 Μονάδες

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(1, f(1))$.

   6 Μονάδες

3. Έστω $\xi > 0$. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $B(\xi, f(\xi))$ και $\Gamma(-\xi, 0)$ εφάπτεται στην $\mathcal{C}_f$ στο σημείο B.

   6 Μονάδες

4. Να δειχθεί ότι η f είναι άρτια και να γίνει πρόχειρα η γραφική της παράσταση.

   6 Μονάδες

Απαντήσεις

1. Η συνάρτηση της απόλυτης τιμής $a(x) = |x|$ είναι συνεχής και η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας $r(x) = \sqrt{x}$ $\sqrt{x}$ είναι επίσης συνεχής. Η f είναι η σύνθεση $r \circ a$ και είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

   Είναι γνωστό ότι οι $a(x), r(x)$ είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους εκτός από το 0. Επομένως η σύνθεση τους παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ εκτός, ίσως, από το 0. Ισχύει

   $$|x| = \begin{cases} -x & , \quad x < 00 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

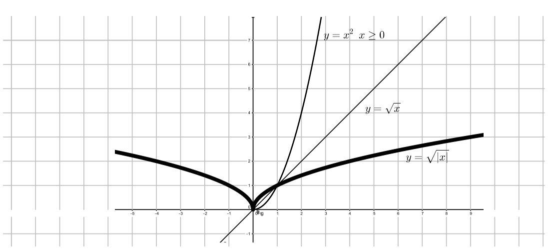
   και επομένως $(|x|)' = \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & , & x < 0 \\ \text{Δεν υπάρχει} & , & x = 0 \\ 1 & , & x > 0 \end{array} \right\} = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}, \ x \neq 0$

   Την παραγωγισιμότητα στο 0 θα την εξετάσουμε χωριστά με την βοήθεια του ορισμού της παραγώγου: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{|x|}} = +\infty$ Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2. Η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο τυχόν σημείο με τετμημένη x_0 όπου η f παραγωγίζεται είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Εδώ $x_0 = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3. Αν $\lambda_{B\Gamma}$ είναι συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας $B\Gamma$ έχουμε $\lambda_{B\Gamma} = \frac{f(\xi) - 0}{\xi + (-\xi)} = \frac{\sqrt{\xi}}{2\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = f'(\xi)$. Άρα ευθεία $B\Gamma$ και η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο B διέρχονται από το ίδιο σημείο (το B) και έχουν το ίδιο συντελεστή διευθύνσεως άρα συμπίπτουν.

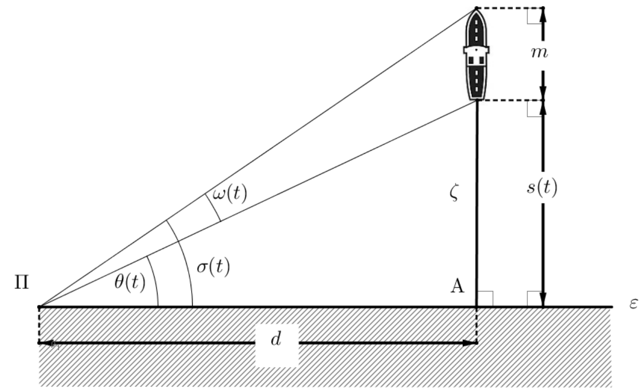
4. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και $f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$ επομένως η f είναι άρτια.
   Επειδή η f είναι άρτια έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Επομένως για να παραστήσουμε γραφικά την f αρκεί να παραστήσουμε μόνο το μέρος της $\mathcal{C}_f$ που αντιστοιχεί στα μη αρνητικα x. Το υπόλοιπο που αντιστοιχεί σε αρνητικά x θα βρεθεί με συμμετρία. Για $x \geq 0$ είναι $f(x) = \sqrt{x}$. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση $sqrtx$, $x \geq 0$ είναι αντίστροφη της συνάρτησης x^2, $x \geq 0$ που έχει γνωστή γραφική παράσταση. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Άρα για να βρούμε την $\mathcal{C}_f$ αρχεί να παραστήσουμε την x^2, $x \geq 0$ να βρούμε την συμμετρική της ως προς $y = x$ και αυτού που βρούμε να πάρουμε το συμμετρικό ως προς την $x = 0$.



---
[1] Επιμέλεια απαντήσεων: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΘΕΜΑ 2

Ένα πλοίο έχει μήκος m και απομακρύνεται από την προκυμαία κινούμενο σε ευθεία ζ που είναι κάθετη στο σύνορο ε της προκυμαίας στο σημείο Α. Η απόσταση της πρύμνης του πλοίου από την προκυμαία είναι συναρτήσει του χρόνου $s(t) = vt$ όπου v σταθερά.



Ένας παρατηρητής στέκεται στο σημείο Π της ε σε απόσταση d από το Α και η γωνία με την οποία βλέπει το πλοίο είναι $\omega(t)$ ενώ η γωνίες με τις οποίες βλέπει τα τμήματα πρύμνη-Α και πλώρη-Α είναι αντιστοίχως $\theta(t)$ και $\sigma(t)$ όπου οι συναρτήσεις $\theta(t)$ και $\sigma(t)$ είναι παραγωγίσιμες.

1. Να εκφράσετε την $\epsilon\varphi\omega(t)$ συναρτήσει των d, m, v, t.

15 Μοναδες

2. Να εκφράσετε τον ρυθμό μεταβολής της $\omega(t)$ συναρτήσει των d, m, v, t.

10 Μοναδες

Σημειωση: Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi\left(\alpha-\beta\right) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$

Απαντησεις

1. Είναι $\omega\left(t\right) = \sigma\left(t\right) - \theta\left(t\right)$ και από τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\sigma\left(t\right) = \frac{s\left(t\right)+m}{d}, \qquad \varepsilon\varphi\theta\left(t\right) = \frac{s\left(t\right)}{d}$$

Είναι

$$\varepsilon\varphi\omega\left(t\right) = \varepsilon\varphi\left(\sigma\left(t\right) - \theta\left(t\right)\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi\sigma\left(t\right) - \varepsilon\varphi\theta\left(t\right)}{1+\varepsilon\varphi\sigma\left(t\right)\cdot\ \varepsilon\varphi\theta\left(t\right)} = \frac{\frac{s(t)+m}{d} - \frac{s(t)}{d}}{1+\frac{s(t)+m}{d}\cdot\frac{s(t)}{d}} =$$

$$= \frac{md}{d^2+s^2\left(t\right)+s\left(t\right)m} = \frac{md}{v^2t^2+vmt+d^2}$$

2. Παραγωγίζοντας την $\varepsilon\varphi\omega\left(t\right) = \frac{md}{v^2t^2+vmt+d^2}$ ως προς t βρίσκουμε:

$$\omega'\left(t\right)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega\left(t\right)} = \frac{-mdv\left(2vt+m\right)}{\left(d^2+v^2t^2+vtm\right)^2}$$

Αλλά

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega\left(t\right)} = 1+\varepsilon\varphi^2\omega\left(t\right) = 1+\left(\frac{md}{v^2t^2+vmt+d^2}\right)^2$$

Επομένως:

$$\omega'\left(t\right)\left(1+\left(\frac{md}{v^2t^2+vmt+d^2}\right)^2\right) = \frac{-mdv\left(2vt+m\right)}{\left(d^2+v^2t^2+vtm\right)^2}$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$\omega'\left(t\right) = \frac{-mdv\left(2vt+m\right)}{m^2d^2+\left(d^2+v^2t^2+vtm\right)^2}$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu f\left(x\right) = x - f\left(x\right) \text{ για όλα τα } x\in\mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

8 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

8 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1}\frac{f\left(x\right)}{x-1} = 1$

9 Μοναδες

Απαντησεις

1. Για όλα τα x ισχύει $x = \sigma\upsilon\nu f\left(x\right) + f\left(x\right)$. Αν $f\left(\acute{x}_1\right) = f\left(x_2\right)$ είναι και $\sigma\upsilon\nu f\left(x_1\right) = \sigma\upsilon\nu f\left(x_2\right)$. Επομένως

$$x_1 = \sigma\upsilon\nu f\left(x_1\right)+f\left(x_1\right) = \sigma\upsilon\nu f\left(x_2\right)+f\left(x_2\right) = f\left(x_2\right).$$

Επομένως η f είναι 1-1 άρα και αντιστρέφεται. Αν στη σχέση $x = \sigma\upsilon\nu f\left(x\right) + f\left(x\right)$ ονομάσουμε $y = f\left(x\right)$ βρίσκουμε $x = \sigma\upsilon\nu y + y$ δηλαδή $f^{-1}\left(y\right) = \sigma\upsilon\nu y + y$. Άρα $f^{-1}\left(x\right) = \sigma\upsilon\nu x + x$.

2. Η f^{-1} είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών. Είναι $f^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)f^{-1}\left(0\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$ και επομένως από το θεώρημα του Bolzano συνάγουμε ότι έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ η οποία λόγω του ότι η f^{-1} είναι 1-1 είναι μοναδική.

3. Παρατηρούμε ότι $f^{-1}\left(0\right) = \sigma\upsilon\nu 0 + 0 = 1$ και επομένως $f(1) = 0$. Για το ζητούμενο όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{f\left(x\right)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1} = f'\left(1\right)$$

Θα βρούμε την $f'\left(1\right)$ μέσω της $f'\left(x\right)$ παραγωγίζοντας την ισότητα $\sigma\upsilon\nu f\left(x\right) = x - f\left(x\right)$. Βρίσκουμε $f'\left(x\right)\left(-\eta\mu f\left(x\right)\right) = 1 - f'\left(x\right)$ και επομένως $f'\left(x\right)\left(1-\eta\mu f\left(x\right)\right) = 1$. Θέτοντας $x = 1$ έχουμε $f'\left(1\right) = 0$ και επομένως $\lim\limits_{x\to1}\frac{f\left(x\right)}{x-1} = 1$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(2x+y)=2f(x)+f(y),\ \text{ για κάθε }\ x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(0)=0$.

   5 Μοναδες

2. $f(2x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

   5 Μοναδες

3. $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

   5 Μοναδες

4. Αν f συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

   5 Μοναδες

5. Αν f παραγωγίσιμη στο 0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

   5 Μοναδες

Απαντησεισ

1. Θέτοντας $x=y=0$ στην $f(2x+y)=2f(x)+f(y)$ βρίσκουμε $f(0)=2f(0)+f(0)$ από την οποία έχουμε $2f(0)=0$ και $f(0)=0$.
2. Θέτοντας $y=0$ στην $f(2x+y)=2f(x)+f(y)$ βρίσκουμε $f(2x+0)=2f(x)+f(0)$ και αφού $f(0)=0$ έχουμε $f(2x)=2f(x)$.
3. Θέτοντας όπου x το $\frac{x}{2}$ στην $f(2x+y)=2f(x)+f(y)$ βρίσκουμε $f(2\frac{x}{2}+y)=2f(\frac{x}{2})+f(y)$. Αλλά $2f(\frac{x}{2})=f(2\frac{x}{2})=f(x)$. Επομένως για όλα τα x,y ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
4. Έχουμε:

   $$\lim_{x\to x_0} f(x) \underset{x=x_0+h}{=} \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0)+f(h)\right)=$$

   $$=\lim_{h\to 0} f(x_0)+\lim_{h\to 0}\left(f(h)\right) \underset{f\text{ συνεχής στο } 0}{=} f(x_0)+f(0)$$

   Επομένως $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
5. Ισχύει

   $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

   $$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f(h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=$$

   $$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'(0).$$

   Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.