Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Τμήματα Γ1, Γ2, Γ3 Θετικής - Γ Οικονομίας, Πληροφορικής
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
18 Ιανουαρίου 2016

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\sqrt{|x|}$$

1. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

7 Μοναδες

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(1, f(1))$.

6 Μοναδες

3. Έστω $\xi > 0$. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $B\left(\xi, f\left(\xi\right)\right)$ και $\Gamma\left(-\xi, 0\right)$ εφάπτεται στην $\mathcal{C}_f$ στο σημείο B.

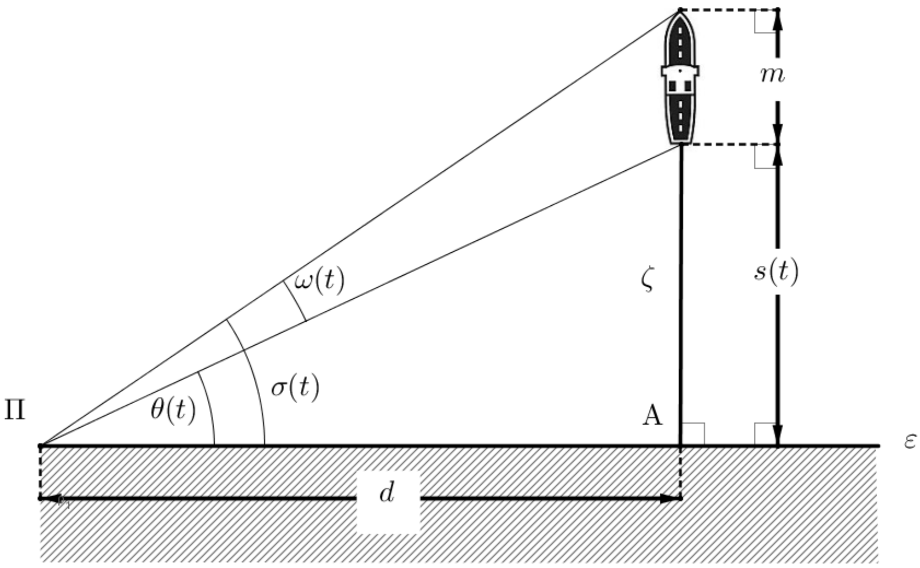
6 Μοναδες

4. Να δειχθεί ότι η f είναι άρτια και να γίνει πρόχειρα η γραφική της παράσταση.

6 Μοναδες

ΘΕΜΑ 2

Ένα πλοίο έχει μήκος m και απομακρύνεται από την προκυμαία κινούμενο σε ευθεία ζ που είναι κάθετη στο σύνορο ε της προκυμαίας στο σημείο Α. Η απόσταση της πρύμνης του πλοίου από την προκυμαία είναι συναρτήσει του χρόνου $s(t) = vt$ όπου v σταθερά.



Ένας παρατηρητής στέκεται στο σημείο Π της ε σε απόσταση d από το Α και η γωνία με την οποία βλέπει το πλοίο είναι $\omega(t)$ ενώ η γωνίες με τις οποίες βλέπει τα τμήματα πρύμνη-Α και πλώρη-Α είναι αντιστοίχως $\theta(t)$ και $\sigma(t)$ όπου οι συναρτήσεις $\theta(t)$ και $\sigma(t)$ είναι παραγωγίσιμες.

1. Να εκφράσετε την $\epsilon\varphi\omega(t)$ συναρτήσει των d, m, v, t.

15 Μοναδες

2. Να εκφράσετε τον ρυθμό μεταβολής της $\omega(t)$ συναρτήσει των d, m, v, t.

10 Μοναδες

Σημειωση: Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi\,(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$

ΘΕΜΑ 3

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu f(x) = x - f(x) \quad \text{για όλα τα} \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

8 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

8 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 1$

9 Μοναδες

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(2x+y) = 2f(x) + f(y), \;\; \text{για κάθε } \; x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(0) = 0$.

   5 Μονάδες

2. $f(2x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   5 Μονάδες

3. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

   5 Μονάδες

4. Αν f συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

   5 Μονάδες

5. Αν f παραγωγίσιμη στο 0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

   5 Μονάδες

Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία