Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τμήματα Γ1, Γ2, Γ3 Θετικής - Γ Οικονομίας, Πληροφορικής
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
7 Απριλίου 2016

Διδάσκοντες:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις[1]

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + x$$

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

   6 Μονάδες

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $\mathcal{C}_f$.

   7 Μονάδες

3. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$

   7 Μονάδες

4. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

   $g(0) = 0$
   $g'(x) = \frac{f'(x)}{f'(g(x))}$ για κάθε x.

   5 Μονάδες

Απαντήσεις

1. Είναι $f'(x) = e^x + 1 > 0$ και επομένως $f \uparrow$. Η f είναι συνεχής και επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, \infty)$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επομένως η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Εξετάζουμε την ύπαρξη πλάγιων-οριζοντίων ασυμπτώτων.

   (α΄) Στο $-\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x \frac{1}{x} + 1\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 1\cdot x) = 0$. Επομένως έχει ασύμπτωτη την $y = x$.
   Στο $+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} + 1\right)$. Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$. Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ και η $\mathcal{C}_f$ δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

3. Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι ίσο με $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)\,dx|$. Είναι $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{e}}{2\sqrt{e}} > 0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $f(x) > 0$ στο $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Επομένως $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)\,dx| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = (e-1)\,e^{-\frac{1}{2}}$ και η τιμή αυτή είναι το E.

4. Έχουμε $g'(x) = \frac{f'(x)}{f'(g(x))} \Leftrightarrow g'(x)\,f'(g(x)) = f'(x) \Leftrightarrow (f(g(x)))' = f'(x) \Leftrightarrow f(g(x)) = f(x) + c$. Θέτοντας στην τελευταία ισότητα όπου x το 0 βρίσκουμε $f(g(0)) = f(0) + c$ δηλαδή $f(0) = f(0) + c$ και $c = 0$. Αλλά τότε $f(g(x)) = f(x)$ και επειδή η f είναι $1-1$ ως γνησίως αύξουσα συνάγουμε ότι $g(x) = x$ για όλα τα x.

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

1. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

   8 Μονάδες

2. Έστω $t \in [\alpha, \beta]$ και $E(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο την $\mathcal{C}_f$, την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της με τετμημένη t και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$. Να βρείτε για ποια τιμή του t το $E(t)$ γίνεται ελάχιστο.

   9 Μονάδες

3. Υποθέτουμε ότι για τον $\rho \in (\alpha, \beta)$ ισχύει

   $f'(\rho) = 0$ και
   $f(\rho) > 0$

   Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

   8 Μονάδες

Απαντήσεις

[1] Επιμέλεια απαντήσεων: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

1. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(\alpha)+f(x)}{2} - f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Είναι $h'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{1}{2}f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$. Για $\alpha < x < \beta$ είναι $\alpha < \frac{\alpha+x}{2} < x$ και αφού $f' \uparrow$ θα είναι $f'(x) > f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$ οπότε $h'(x) > 0$. Άρα η παραγωγίσιμη συνάρτηση h στο $(\alpha,\beta])$ έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $h(\beta) > h(\alpha)$. Αλλά $h(\alpha) = 0$ επομένως $h(\beta) > 0$ δηλαδή $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ από την οποία έχουμε το αποδεικτέο.

2. Η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $P(t, f(t)$ είναι η $y = f'(t)(x-t) + f(t)$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ θα ισχύει $f(x) \geq f'(t)(x-t) + f(t)$ για όλα τα $x \in [\alpha,\beta]$. Επομένως $E(t) = \int_\alpha^\beta [f(x) - (f'(t)(x-t) + f(t))]\,dx$. Άρα $E(t) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f'(t)\,x dx + \int_\alpha^\beta f'(t)\,t dx + \int_\alpha^\beta f(t)\,dx$. Δηλαδή: $E(t) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - f'(t)\int_\alpha^\beta x dx + f'(t)\,t\int_\alpha^\beta 1 dx - f(t)\int_\alpha^\beta 1 dx$ ή $E(t) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - f'(t)\left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha\right) + f'(t)\,t(\beta-\alpha) - f(t)(\beta-\alpha)$. Παραγωγίζοντας ως προς t βρίσκουμε: $E'(t) = 0 - f''(t)\left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha\right) + f''(t)\,t(\beta-\alpha) + f'(t)(\beta-\alpha) - f'(t)(\beta-\alpha)$ ή $E'(t) = f''(t)(\beta-\alpha)\left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Είναι $f''(t) > 0$, $\beta - \alpha$ και επομένως $E'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{\alpha+\beta}{2}$. Συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ είναι $E'(t) < 0$ και $E(t) \downarrow$ ενώ στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ είναι $E'(t) > 0$ και $E(t) \uparrow$ άρα η $E(t)$ έχει ελάχιστο για $t = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα και αφού μηδενίζεται στο ρ στο $[\alpha,\rho)$ θα είναι αρνητική και στο $(\rho,\beta]$ θα είναι θετική. Άρα η f έχει ελάχιστο $f(\rho)$ στο ρ που είναι θετικό. Αφού το ελάχιστο της f είναι θετικό είναι $f(x) > 0$ για όλα τα x.

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

Η f είναι παραγωγίσιμη.

$f(x+y) \leq f(x)\,f(y)$ για όλα τα x, y.

$f(0) = 1$

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε x ισχύει $f(x)\,f(-x) \geq 1$.

   5 Μονάδες

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε x ισχύει $f(x) > 0$.

   5 Μονάδες

3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ Να αποδειχθεί ότι:

   (α′) Για κάθε $h > 0$ ισχύει:

   $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$$

   (β′) Για κάθε $h < 0$ ισχύει:

   $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$$

   $$f(x_0+h) - f(x_0) \leq f(x_0)\,(f(h)-1)$$

   5 Μονάδες

4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερός αριθμός a ώστε:

   $$f'(x) = a f(x)$$

   για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   5 Μονάδες

5. Να βρεθεί η f αν είναι γνωστό ότι $\int_0^1 f(x)\,f'(x)\,dx = 2$.

   5 Μονάδες

Απαντησεις

1. Θέτοντας στην σχέση $f(x+y) \leq f(x)\,f(y)$ όπου y το $-x$ βρίσκουμε ότι $f(0) \leq f(x)\,f(-x)$ από την οποία έχουμε το αποδεικτέο.

2. Από την σχέση $f(x)\,f(-x) \geq 1$ συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει ρίζες. Πράγματι αν υποτεθεί ότι ο x_0 είναι ρίζα της f αντικαθιστώντας το στην σχέση αυτή βρίσκουμε ότι $0 \cdot f(-x_0) \geq 1$ δηλαδή $0 \geq 1$ (άτοπο). Η συνεχής f στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δεν έχει ρίζες επομένως διατηρεί σε αυτό πρόσημο. Είναι $f(0) = 1$ επομένως $f(x) > 0$ γιά κάθε x.

3. Έχουμε διαδοχικά:

   $$f(x_0+h) \leq f(x_0)\,f(h) \Rightarrow$$

   $$f(x_0+h) - f(x_0) \leq f(x_0)\,f(h) - f(x_0) \Rightarrow$$

   Αν τώρα $h > 0$ διαιρώντας στην τελευταία ανισότητα με h βρίσκουμε ότι

   $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$$

   Όμοια αν $h < 0$ πάλι διαιρώντας βρίσκουμε:

   $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$$

4. Η f είναι παραγωγίσιμη και

   $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

   $$= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

   Για $h > 0$ από την $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$ βρίσκουμε ότι $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$ δηλαδή $f'(x_0) \leq f(x_0)\,f'(0)$
   Για $h < 0$ από την $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$ έχουμε $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq \lim_{h\to 0^-} f(x_0)\,\frac{f(h)-1}{h}$ οπότε $f'(x_0) \geq f(x_0)\,f'(0)$. Τελικά $f'(x_0) = f(x_0)\,f'(0)$. Επειδή το x_0 είναι τυχόν έχουμε ότι αν ονομάσουμε $a = f'(0)$ έχουμε ότι $f'(x) = a f(x)$ για όλα τα x.

5. Για κάθε x είναι $\frac{f'(x)}{f(x)} = a$ οπότε $(\ln|f(x)|)' = (ax)'$. Αφού $f(x) > 0$ είναι $\ln f(x) = ax + c$. Θέτοντας $x = 0$ βρίσκουμε $c = 0$ και επομένως $\ln f(x) = ax$ άρα $f(x) = e^{ax}$. Αντικαθιστούμε στην $\int_0^1 f(x) f'(x)\, dx = 2$ βρίσκουμε $\int_0^1 ae^{ax}e^{ax}dx = 2$ οπότε $\int_0^1 ae^{2ax}dx = 2$ και $\left[\frac{e^{2ax}}{2}\right]_0^1 = 2$. Από την τελευταία σχέση έχουμε $\frac{e^{2a}}{2} - \frac{1}{2} = 2$ και $a = \frac{1}{2}\ln 5$. Άρα $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με

$f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$

1. $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 1$.

6 Μοναδες

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

6 Μοναδες

3. $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

7 Μοναδες

4. $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

6 Μοναδες

Απαντησεις

1. Είναι $f' \uparrow$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x-1, x], [x, x+1]$ και έχουμε ότι: $f(x) - f(x-1) = \frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)} = f'(x_1)$, $x_1 \in (x-1, x)$
$f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f'(x_2)$, $x_2 \in (x, x+1)$ Είναι $x-1 < x_1 < x < x_2 < x+1$ και επομένως $f'(x_1) < f'(x) < f'(x_2)$ από την οποία προκύπτει ότι
$f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$.

2. Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον $x'x$ και επειδή είναι ορισμένη στο στο $[0, +\infty]$ θα είναι ασύμπτωτη στο ∞. Έχουμε λοιπόν ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Έχουμε ακόμη:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x-1) \underset{x-1=u}{=} \lim_{u\to+\infty} f(u) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) \underset{x+1=u}{=} \lim_{u\to+\infty} f(u) = 0$$
Αν τώρα στην ανισότητα
$f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$
εφαρμόσουμε το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Αν υποτεθεί ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει θα υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) \geq 0$. Θεωρούμε $x_1 > x_0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $f'(x_1) > f'(x_0) \geq 0$. Για κάθε $x \in (x_1, +\infty)$ από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει κατάλληλο $\xi \in (x_1, x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi)$. Επειδή $f'(\xi) > f'(x_1)$ είναι $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > f'(x_1)$ από την οποία έχουμε ότι $f(x) > f'(x_1)(x-x_1) + f(x_1)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x_1)(x-x_1) + f(x_1)) = +\infty$ (διότι $f'(x_1) > 0$). Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (άτοπο). Άρα πράγματι η παράγωγος της f είναι αρνητική σε όλα τα x.

4. Αν υποτεθεί ότι για κάποιο x_0 είναι $f(x_0) \leq 0$ θεωρούμε $x_1 > x_0$. Επειδή η f έχει αρνητική παράγωγο άρα είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x > x_1$ είναι $0 \geq f(x_0) > f(x_1) > f(x)$. Στην $f(x_1) > f(x)$ παίρνουμε ορια στο $+\infty$ και έχουμε το άτοπο συμπέρασμα$f(x_1) > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε x.