Τα Θέματα Πανελληνίων εξετάσεων Μαθηματικών Προσανατολισμού 2017 & η πρόσληψη τους από την μαθηματική κοινότητα.

Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Μαθηματικός, (MSc, PhD)

9 Ιουλίου 2017

Περίληψη

Το παρόν κείμενο περιέχει αυστηρά προσωπικές απόψεις (τις οποίες καταθέτω ως μέλος της μαθηματικής κοινότητας και όχι υπό την τρέχουσα υπηρεσιακή μου ιδιότητα) για:

1. Τα φετινά θέματα των Μαθηματικών Προσανατολισμού.
2. Την υποδοχή τους και τις αντιδράσεις που προκάλεσαν.

Το κείμενο αυτό ολοκληρώθηκε ένα μήνα μετά την διεξαγωγή της εξέτασης των Μαθηματικών. Όπως είναι φυσικό κάποιες σκέψεις που περιέχει έχουν ήδη διατυπωθεί δημόσια από άλλους συναδέλφους. Για τον λόγο αυτό δεν διεκδικεί την πρωτοτυπία. Ιδιαίτερα θα ήθελα να αναφερθώ σε δύο νήματα του www.mathematica.gr.

1. `http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=59025`
2. `http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=58882`

1 Το περιεχόμενο των θεμάτων.

1.1 ΘΕΜΑ Α

Α1 Ζητούσε την απόδειξη ενός θεωρήματος που υπάρχει στην παράγραφο 2.6 και στην απόδειξη του γίνεται ουσιώδης χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής.

Α2 Η απάντηση στο ερώτημα απαιτούσε γνώση της σχέσης περιέχεσθαι μεταξύ της κλάσης των συνεχών και της κλάσης των παραγωγισίμων συναρτήσεων. Το ότι η πρώτη περιέχεται στην δεύτερη είναι θεώρημα του σχολικού (παράγραφος 2.1) και η πληροφορία ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος υπάρχει στον εκτενή σχολιασμό ακριβώς πριν το θεώρημα. Φυσικά το βιβλίο περιέχει και άλλα πρόσφορα αντιπαραδείγματα.

Α3 Ζητούσε ένα ορισμό που έχει ζητηθεί και στο παρελθόν (2008) και υπάρχει στην παράγραφο 1.8.

Α4 Περιλάμβανε 5 ερωτήματα σωστό λάθος που οι πληροφορίες για την απάντηση τους υπάρχουν στις παραγράφους 1.6, 1.2, 2.7, 1.7, 1.8.

1.2 ΘΕΜΑ Β

Β1 Έλεγχε γνώσεις της παραγράφου 1.2.

Β2 Έλεγχε γνώσεις της παραγράφου 1.2.

Β3 Έλεγχε γνώσεις από τις παραγράφους 2.6, 2.7, 2.8,.

Β4 Έλεγχε γνώσεις από τις παραγράφους 2.9, 2.10

1.3 ΘΕΜΑ Γ

Η άσκηση στηρίζεται σε μια οικεία μαθηματική κατάσταση (άσκηση Β8 της παραγράφου 3.7).

Γ1 Το ερώτημα αυτό στηρίζεται σε γνωστή τεχνική εύρεσης εφαπτομένης μιας γραφικής παράστασης που άγεται από σημείο εκτός αυτής. Για παράδειγμα αυτή η τεχνική αναπτύσσεται στην άσκηση Α10 της παραγράφου 2.3. Όμως η εξίσωση που ικανοποιούν οι τετμημένες των σημείων επαφής είναι πιο σύνθετη από εκείνη της άσκησης. Πρόκειται για εξίσωση που πρέπει να βρεθούν προφανείς λύσεις και να αποκλειστούν άλλες. Η τεχνική επίλυσης είναι ανάλογη εκείνης της άσκησης Β7 της παραγράφου 2.5. Μία από τις λύσεις που μπορούν να δοθούν χρησιμοποιεί το θεώρημα Rolle.

Γ2 Άσκηση υπολογισμού εμβαδού μεταξύ δύο γραφικών παραστάσεων (άσκηση Β8 της παραγράφου 3.7).

Γ3 Υπολογισμός ορίου που δεν απαιτεί πράξεις αλλά χρειάζεται προσοχή (πού και πως τείνει η ανεξάρτητη μεταβλητή) και στην εύρεση του προσήμου του παρονομαστή. Ο καθορισμός του προσήμου του παρονομαστή μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Ενδεικτικά με αξιοποίηση της κυρτότητας, με μελέτη ή και χρήση της ανισότητας $\eta\mu x = \eta\mu(\pi - x) < \pi - x$ για $x \neq \pi$.

Γ4 Ζητείται η απόδειξη μιας ανισότητας με ολοκλήρωμα συνάρτησης που δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς (το λεγόμενο ολοκληροημίτονο). Παρόμοιες ανισότητες υπάρχουν και στο σχολικό βιβλίο (άσκηση 10 των Γενικών Ασκήσεων του κεφαλαίου 3). Το ερώτημα αντιμετωπίζεται με ύλη της της παραγράφου 3.4 και μπορούσε να χρησιμοποιηθεί το ερώτημα Γ1 αλλά και το Γ3. Η ανισότητα αυτή δεν ήταν πολύ ισχυρή και γιαυτό επέτρεπε πολλές προσεγγίσεις. Σε κάποιες χρειαζόταν γνώση προσεγγιστικών τιμών των e και π.

1.4 ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση που δόθηκε αποτελείται από δύο κλάδους που περιέχουν οικεία «υλικά». Παρόμοιες συναρτήσεις εμφανίζονται στις ασκήσεις Β9 της παραγράφου 2.3 και Β9 iv) της παραγράφου 3.5.

Δ1 Ελέγχονται γνώσεις των παραγράφων 1.8 και 2.7.
Η αντιμετώπιση του θέματος απαιτούσε μια ελάχιστη εξοικείωση με βασικές υπαρκτές συναρτήσεις που είναι το κύριο αντικείμενο του μαθήματος. Εν προκειμένω την $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$. Στο σχολικό βιβλίο στην παράγραφο 1.8 εξετάζεται μια παρόμοια συνάρτηση (η $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$).
Ας σημειωθεί ότι το ερώτημα αυτό προσφέρει ένα ακόμη αντιπαράδειγμα για το ερώτημα Α2. Βρέθηκαν δε πραγματικά γραπτά όπου αυτή η δυνατότητα αξιοποιείται.

Δ2 Ελέγχονται γνώσεις της παραγράφου 2.10 η οποία συνοψίζει γνώσεις προηγουμένων παραγράφων.

Δ3 Πρόκειται για ερώτημα που ελέγχει τυπικά γνώσεις από τις παραγράφους 3.4 και 3.5. Το ερώτημα αυτό ελέγχει κυρίως

- Την κατοχή της τεχνικής της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.
- Την ικανότητα των υποψηφίων φοιτητών να συγκρίνουν με απλές γνώσεις και χωρίς πολύπλοκες μεθοδεύσεις δύο συναρτήσεις (εν προκειμένω τις $e^x\eta\mu x$ και e^{5x})

Δ4 Πρόκειται πάλι για την επίλυση μια εξίσωσης αλλά σε διαφορετική λογική από εκείνη του Γ1. Και εδώ υπήρχαν πολλοί τρόποι αντιμετώπισης. Το θέμα έλεγχε:

- Την αλγεβρική ικανότητα να μετασχηματιστεί η εξίσωση σε μια προσφορότερη μορφή (λ.χ. την $f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$).
- Την αξιοποίηση, χωρίς καθοδήγηση, προηγουμένων ευρημάτων (ότι το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι μέγιστο).

2 Μερικά χαρακτηριστικά των θεμάτων.

2.1 Η αξιοποίηση του σχολικού βιβλίου.

Το σχολικό βιβλίο είναι το βασικό μέσο με το οποίο υλοποιείται το πρόγραμμα σπουδών. Περιλαμβάνει:

1. Τις θεωρητικές γνώσεις που αναμένεται να αποκτήσουν οι μαθητές και

2. Μια έμμεση περιγραφή με τα παραδείγματα και τις ασκήσεις ενός minimum ικανοτήτων και δεξιοτήτων που αναφέρονται σε αυτές τις γνώσεις.

Από την στιγμή που στον διαγωνισμό που ονομάζεται «Πανελλήνιες Εξετάσεις» έχουμε οριοθετημένη ύλη και βάση το σχολικό βιβλίο, αυτό δε μπορεί παρά να αποτελεί σημείο αναφοράς. Και τούτο ανεξάρτητα από την πληρότητα, τα πλεονεκτήματα ή τις όποιες αδυναμίες του. Ας σημειωθεί ότι στην πλειονότητα τους και οι συγγραφείς εξωσχολικών βοηθημάτων θεωρούν περίπου δεδομένη την έκθεση του σχολικού βιβλίου και εκκινούν αναπτύσσοντας ασκήσεις και τεχνικές επίλυσης από κει και πέρα. Υπάρχουν βιβλία αυτού του είδους που δεν περιέχουν καθόλου θεωρία, περιέχουν συνοπτική θεωρία ή/και περιέχουν μερικές επιπλέον θεωρητικές επισημάνσεις.

Αυτό σημαίνει ότι αναμένεται κατά την διδασκαλία και την αξιολόγηση να επιδιώκεται η επίτευξη/έλεγχος των παραπάνω. Είναι λογικό και στις Πανελλήνιες Εξετάσεις που είναι το φυσικό επακόλουθο της σχολικής πορείας να λαμβάνεται σοβαρά υπ΄ οψιν αυτό το στοιχείο.

Υπάρχουν και άλλοι λόγοι για τους οποίους είναι σημαντικό να θεωρείται γνώμονας το σχολικό βιβλίο. Το σχολικό βιβλίο αποτελεί τον κοινό παρονομαστή της διδασκαλίας σε εθνικό επίπεδο. Είναι αυτό που παίρνουν στα χέρια τους όλοι οι μαθητές και διδάσκουν όλοι οι καθηγητές. Στο συγκεκριμένο σύστημα εξετάσεων αποτελεί ένα είδος γνωστικού συμβολαίου που συνάπτεται μεταξύ του οργανωμένου από την Πολιτεία εκπαιδευτικού συστήματος και μαθητών-καθηγητών. Δίνει μια πρώτη εικόνα των μορφωτικών συναλλαγών που έχουν πραγματοποιηθεί στις σχολικές τάξεις. Το πόσο δίκαιο είναι ένα σύστημα εξετάσεων καθορίζεται, μεταξύ άλλων, από το πόσο *απέχει* από αυτό που παρέχει το εκπαιδευτικό σύστημα σε όλα τα Ελληνόπουλα.

Βέβαια ποτέ δεν υπήρχε πλήρης ταύτιση μεταξύ θεμάτων πανελληνίων εξετάσεων και σχολικών βιβλίων-πραγματικής διδασκαλίας στα σχολεία. Οι πανελλήνιες εξετάσεις όποια ονομασία και αν είχαν (Ακαδημαϊκό Απολυτήριο, Εισιτήριες, Εισαγωγικές, Πανελλήνιες, Γενικές, Απολυτήριες, Πανελλαδικές)[1] ως διαγωνισμός που αποσκοπεί στην επιλογή είχαν και έχουν ένα πιο αυστηρό κριτήριο από εκείνο που έχουν οι πάσης φύσεως εξετάσεις στα σχολεία. Υπήρχαν περίοδοι όπου:

1. Έως το 1968 το κριτήριο αυτό ήταν εντελώς ασύμβατο με τα σχολικά βιβλία διότι τα βιβλία δεν ήταν επαρκή.[2]

2. Από το 1968 έως το 1979 το κριτήριο ήταν αρκετά συμβατό με τα βιβλία τα οποία ήσαν επαρκή.[3]

---

[1] Βλ. σχετικά:
Εθνικος Οργανισμος Εξετασεων *Συστήματα Εισαγωγής στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση στην Ελλάδα 1964-2016*, 2916.
ανακτημένο από `http://eoe.minedu.gov.gr/images/history_greek__national_exams.pdf`

[2] Πριν το 1968 η Άλγεβρα στα σχολεία διδάσκονταν από το βιβλίο του Νείλου Σακελλαρίου και η Γεωμετρία-Τριγωνομετρία από τα βιβλία του Νικολάου Νικολάου. Τα βιβλία αυτά υπολείπονταν όχι μόνο των απαιτήσεων των εξετάσεων για τα Πανεπιστήμια αλλά δεν επαρκούσαν ούτε καν για την υποστήριξη της καθημερινής δουλειάς στο σχολείο.

[3] Για τα τμήματα της Θετικής Κατεύθυνσης ήσαν σε ισχύ βιβλία που μεταξύ άλλων είχαν

3. Από το 1979 έως το 1982 κατεβλήθη προσπάθεια το κριτήριο να παρακολουθεί τα σχολικά βιβλία και μάλιστα να διανέμονται υπό μορφή οδηγιών συμπληρωματικά θέματα.[4]

4. Από το 1983 έως το 2015 το κριτήριο των εξετάσεων αυτονομήθηκε από τα σχολικά βιβλία ανεξάρτητα από την επάρκεια των τελευταίων. Εντελώς ενδεικτικά:

    - Το 1983 πρώτη χρονιά λειτουργίας του συστήματος των Δεσμών δόθηκε προς απόδειξη το Θεώρημα του Rolle που ήταν πρακτικά αδύνατο να αποδειχθεί με βάση το ισχύον βιβλίο του Στάϊκου. Πρόκειται για ένα ερώτημα που σε πολλές μεταγενέστερες διανομές θεμάτων έχει «ξεχαστεί» και δεν συμπεριλαμβάνεται.
    - Το 1992 είχαμε θέματα που είχαν σημαντική απόσταση από το περιεχόμενο των βιβλίων.
    - Η απόσταση αυτή μεγάλωνε τα επόμενα χρόνια με αποκορύφωμα την λάθος συναρτησιακή εξίσωση του 1997 και το πολύ απαιτητικό 4ο θέμα του 1998[5].
    - Το 2000 πρώτη χρονιά εξετάσεων με το σύστημα των κατευθύνσεων υπήρξαν δύο θέματα που εμφανώς δεν υποστηρίζονταν από το σχολικό βιβλίο (1ο ΘΕΜΑ το Β1 γ και 3ο ΘΕΜΑ το β». Η διατήρηση της ύπαρξης διάσπαρτων ερωτημάτων που να αναδεικνύουν[6] την απόσταση των θεμάτων από το σχολικό βιβλίο διατηρήθηκε έως το 2015.[7]

Στα φετινά θέματα με τον πιο σαφή και κατηγορηματικό τρόπο δηλώθηκε η πρόθεση *να μην ακυρωθεί το σχολικό βιβλίο.* Οι θεματοδότες επέλεξαν να στηριχθούν σε αυτό.

2.2 Η ανάδειξη των ουσιωδών μερών.

Το μάθημα των Μαθηματικών προσανατολισμού έχει ως περιεχόμενο την Ανάλυση. Αν θέλαμε να ακριβολογήσουμε περισσότερο θα λέγαμε ότι το περιεχόμενο του είναι «Στοιχεία Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού» ή αλλιώς

ενσωματώσει την λογική των θεμάτων των εξετάσεων. Πρόκειται για τα βιβλία των Ντζιώρα, Ιωαννίδη, Μπούσγου-Ταμβακλή, Βαβαλέτσκου-Μπούσγου, Πανάκη, Παπατριανταφύλλου, Στάϊκου και αργότερα του Κανέλλου

[4] Διδάσκονταν τα βιβλία των Νοταρά κ.α, Παπανικολάου, Τσάγκα, Ντζιώρα, Παπαδόπουλου, Στάϊκου.

[5] Το οποίο μεταξύ άλλων απαιτούσε ως (αφανές) λήμμα την σχετική πρόταση ολοκλήρωσης ανισοτήτων η οποία τότε ήταν στο σχολικό βιβλίο άσκηση.

[6] Βλ. και σχολιασμό μου στο mathematica:
`http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=107&t=54509&start=20`
`http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=107&t=54509#p263234`

[7] Βλέπε και την μελέτη:
Γιαννης Θωμαΐδης *Μαθηματικά & Εξετάσεις*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, 2009

«Στοιχεία Απειροστικού Λογισμού». Πρόκειται για μάθημα που είναι από άποψη έκτασης και τεχνικών λιγότερο εκτεταμένο από ένα μάθημα «Calculus» αλλά έχει σχετικά πληρέστερη θεωρητική τεκμηρίωση. Βέβαια η τεκμηρίωση αυτή υπολείπεται κατά πολύ εκείνης των δύο τελευταίων βιβλίων Ανάλυσης των Δεσμών και το έλλειμμα αυτό γίνεται αισθητό με τις συνεχείς μειώσεις ύλης. Με κανένα τρόπο δεν αποτελεί μάθημα Ανάλυσης με την τρέχουσα ακαδημαϊκή σημασία του όρου: Δεν εξετάζει γενικά φαινόμενα και ιδιότητες συναρτήσεων αλλά ασχολείται με συγκεκριμένες ιδιότητες και διαδικασίες εφαρμοσμένες σε συγκεκριμένες συναρτήσεις. Το «σύμπαν» των συναρτήσεων είναι μια σχολική εκδοχή των στοιχειωδών συναρτήσεων: Πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, η απόλυτη τιμή και όσες προκύπτουν από αυτές μέσω πράξεων συναρτήσεων: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός διαίρεση, σύνθεση και σε μια περίπτωση, των εκθετικών, με αντιστροφή που μας οδηγεί στις λογαριθμικές συναρτήσεις. Είναι ένα αρκετά προφυλαγμένο σύμπαν που αφήνει απ΄ έξω πολλές κοινές συναρτήσεις (ακέραιο μέρος, δεκαδικό μέρος, αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις). Πάνω σε αυτές τις συναρτήσεις ασκούνται οι παρακάτω βασικές διαδικασίες:

1. Εύρεση εφαπτομένων.
2. Εύρεση εμβαδών.
3. Μελέτη συναρτήσεων.
4. Εύρεση μεγίστων-ελαχίστων.
5. Επίλυση προβλημάτων.

Άλλες έννοιες, θεωρήματα, διαδικασίες όπως:

1. Εύρεση ορίων.
2. Τα θεωρήματα Bozano, Rolle, Lagrange,[8] De l'Hospital
3. Υπολογισμοί παραγώγων και ολοκληρωμάτων
4. Επίλυση εξισώσεων και απόδειξη ανισοτήτων.

αν και παρουσιάζουν ενδιαφέρον διαδραματίζουν ένα βοηθητικό ή/και δευτερεύοντα ρόλο.

Αυτός ο προσανατολισμός (που παρεμπιπτόντως έχει περιγραφεί σε παλαιότερες οδηγίες διδασκαλίας) εν τούτοις έχει διαχρονικά αγνοηθεί από τις επιτροπές εξετάσεων.

Παραδειγμα 1 Ενώ οι οδηγίες τονίζουν ότι η διδασκαλία του ορίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό αλλά χρειάζεται για την προετοιμασία της έννοιας της παραγώγου και του ολοκληρώματος το 2007 τέθηκε το παρακάτω θέμα:

[8]Μέσης τιμής

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt, \qquad x\in[0,1]$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt, \qquad x\in[0,1]$$

1. Να δειχθεί ότι $F(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
2. Να αποδειχθεί ότι:
$$f(x)\cdot G(x)>F(x)$$
για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
3. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:
$$\frac{F(x)}{G(x)}\le\frac{F(1)}{G(1)}$$
για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
4. Να βρεθεί το όριο:
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu^2 t dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5}$$

που στο τελευταίο ερώτημα περιέχει ένα τερατώδες όριο.

Παραδειγμα 2 Ενώ οι διαφορικές εξισώσεις είναι (κατά την γνώμη μου κακώς) εδώ και πολλά χρόνια εκτός διδακτέας ύλης το 2013 τέθηκε το ακόλουθο θέμα:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$ και
- $g(x)=x^3+\frac{3x^2}{2}-1$

1. Να αποδείξετε ότι:
$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\quad x\in\mathbb{R}$$
2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης
$$f(g(x))=1.$$
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathrm{x}_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:
$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=\mathrm{f}\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\phi x_0.$$

όπου ζητείται στην ουσία να επιλυθεί μαι διαφορική εξίσωση.

Παραδειγμα 3 Φυσικά οι ολοκληρωτικές εξισώσεις ούτε σαν όρος δεν υπάρχουν στο βιβλίο. Παρ΄ όλα αυτά το 2011 δόθηκε το παρακάτω θέμα:

> Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:
> i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.
> ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int\limits_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$
> iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int\limits_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$
>
> 1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
> 2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
> 3. Να υπολογίσετε το όριο:
> $$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$
> 4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
> $$F(x) = \int\limits_1^x f\left(t^2\right) dt$$
> με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

που τελικά η εύρεση της f ανάγονταν σε μια απλή διαφορική εξίσωση.

Το ότι τα θέματα των τριών παραπάνω παραδειγμάτων αγνοούν προκλητικά και επιδεικτικά σχολικό βιβλίο και εκπαιδευτικές κατευθύνσεις εμπίπτοντας έτσι στον σχολιασμό της υποενότητας 2.1 είναι ένα ζήτημα.

Το άλλο ζήτημα, που δεν πρέπει να παραβλέπεται, είναι ότι πρόκειται για ανούσια θέματα που ζητούν από τον εξεταζόμενο να ακολουθήσει βήμα-βήμα ασήμαντες διαδικαστικές λεπτομέρειες που στερούνται πλήρως νοήματος. Η ανάγκη για τέτοιου είδους «δημιουργίες» δεν συναντά κανένα απολύτως φραγμό. Προκειμένου να ολοκληρωθεί η σύνθεση συρράπτονται ετερόκλητα κομμάτια χωρίς νόημα.

Παραδειγμα 4 Ακραία περίπτωση αποτελεί το 4ο θέμα του 2008 που με μια εξαιρετικά επιεική διατύπωση αποτελεί ένα παράδειγμα προς αποφυγήν:

> Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
> $$f(x) = \left(10x^3 + 3x\right) \int_0^2 f(t)\, dt - 45$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

3. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (1) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (2) ισχύει ότι

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε

(α′) να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

(β′) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

Το θέμα αυτό ξεκινάει από μια ιδέα που υπήρξε και στις εξετάσεις δεσμών (1η Δέσμη 1996, 4ο Θέμα) και συνδυάζεται με μια γνωστή άσκηση που υπήρχε σε πολλά βιβλία και εμφανίζεται και στις εξετάσεις Mathematical Tripos του Cambrigde το 1925.

Τέλος ένα άλλο στοιχείο που δεν πρέπει να παραβλεφθεί είναι ότι οι «συνθέσεις» αυτές δεν αποτελούν πραγματικά Μαθηματικά. Είναι απίθανο να τις συναντήσει κάποιος σε αξιόλογα βιβλία Ανάλυσης άλλης χώρας οποιουδήποτε επιπέδου. Είναι κατά κύριο λόγο ντόπιες κατασκευές. [9]

Το φαινόμενο έχει σημαντική διάρκεια και σε ότι αφορά την Ανάλυση[10] άρχισε από τις Δέσμες και συνεχίζεται αδιαλείπτως επί 34 χρόνια. Τροφοδοτείται από την θεματογραφία, γράφονται τόμοι βιβλίων που την υποβαστάζουν, δημιουργούν ένα «ρεύμα» στην προετοιμασία των μαθητών, διαμορφώνουν μια συγκεκριμένη μαθηματική κουλτούρα[11] στους διδάσκοντες και ένα «κεκτημένο»

[9] Συχνά αποτελούν προσαρμογές, με βάση τα ντόπια ήθη, ασκήσεων που έχουν εμφανισθεί στην αλλοδαπή. Για παράδειγμα το η βάση θέματος του 2009 αντλήθηκε από Ρουμάνικο διαγωνισμό της ίδιας χρονιάς.

[10] Ανάλογα φαινόμενα, μικρότερης κλίμακας παρατηρήθηκαν και σε άλλες εποχές επικεντρωμένα στην Άλγεβρα (π.χ. τριώνυμο, απόλυτες τιμές). Βλ. σχετικά
Γιαννης Θωμαΐδης *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης. (Η περίπτωση της απόλυτης τιμής). Διδακτορική Διατριβή, Θεσσαλονίκη, 1995*
καθώς και με τους πίνακες ή διάφορους συνδυασμούς πιθανοτήτων, μιγαδικών, πιθανοτήτων, πινάκων (οι λεγόμενες «συνδυαστικές ασκήσεις») που συνέδεαν ετερόκλητα κομμάτια.

[11] Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση του βιβλίου:
Gaston Alignac *Thèmes mathématiques*, Θέματα Μαθηματικών (Κατάλληλα για την 1η Δέσμη), ΑΙΘΡΑ, 1995
Προκειται για βιβλίο που αναφέρεται ως μετάφραση από τα Γαλλικά (παρά τις επίμονες αναζητήσεις μου ουδέποτε κατόρθωσα να εντοπίσω το Γαλλικό πρωτότυπο) και αποτέλεσε σημείο αναφοράς για μεγάλο πλήθος διδασκόντων. Κάποιοι αναφέρονταν σε αυτό λέγοντας απλώς «ο Gaston».

που με την σειρά του επανατροφοδοτεί τις εξετάσεις. Πρόκειται για μια καθαρά εγχώρια μαθηματική στρέβλωση που δίνει σε διδάσκοντες και διδασκόμενους μια ψεύτικη εικόνα του τι είναι τα Μαθηματικά. Με την διαδοχική απαλοιφή των άλλων εξεταζόμενων κλάδων των Μαθηματικών η παραγωγή τέτοιων «συνθέσεων» κατακυρίευσε την Ανάλυση. Επαναλαμβάνω μια σχετική φράση που είχα γράψει στο mathematica πριν 9 χρόνια:[12]

> Δίνουμε την εντύπωση ότι οι πρωτεργάτες απειροστικού τον επινόησαν και οι μεγάλοι θεμελιωτές του 19ου αιώνα τον έφεραν σε λογαριασμό για ένα και μόνο λόγο: Για να μπορούν σε μια μικρή αλλά δοξασμένη χώρα της Ευρώπης να δίνουν κιτς θέματα με συναρτήσεις - παγόδες:
>
> $$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)\,dt + 3 & , \quad x \in (0,2] \\ 6 \lim\limits_{t \to 0} \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} & , \quad x = 0 \end{cases}$$
>
> και να βγάζουμε τα υπαρξιακά εσώψυχα μας. Ούτε μέγιστα-ελάχιστα ούτε προσεγγίσεις ούτε διαφορικές εξισώσεις ούτε υπολογισμοί έργου ή εμβαδού. Εμείς οι υψιπετείς έχουμε τον καθ΄ ημάς απειροστικό λογισμό.

Πλείστοι εκπαιδευτικοί ξεκίνησαν ως μαθητές εκπαιδευόμενοι με *τέτοιου είδους υλικό* κατά το πρότυπο:

$$\text{Συνοπτική Θεωρία} \longrightarrow \text{«Μεθοδολογία»} \longrightarrow \text{Ασκήσεις}$$

και μετά από ένα σύντομο διάλειμμα στο Πανεπιστήμιο, όπου παρακολούθησαν κανονικά Μαθηματικά, επανήλθαν, ως διδάσκοντες πλέον, στο ίδιο μοντέλο. Επέλεξαν να έχουν ως βασική, και ενίοτε μόνη, πηγή ενημέρωσης τα βοηθήματα (ή παράγωγα τους) που με ελάχιστες εξαιρέσεις αναπαράγουν τις ίδια μαθηματική οπτική. Αρκετοί, ικανότατοι ως επαγγελματίες, μόχθησαν και είδαν τη δουλειά τους μέσα σε αυτό το μαθηματικό υπόδειγμα να δικαιώνεται και να καταξιώνεται. Το συγκεκριμένο υπόδειγμα, αν και λάθος, φαντάζει ως αυτονόητο. Και επομένως είναι ανθεκτικό.

Για τον λόγο αυτό δεν είναι τυχαία η διαδεδομένη δυσανεξία για την θεωρητική θεμελίωση της διδασκαλίας, τον πειραματισμό, την συνεχή και επιμελημένη φροντίδα στις έννοιες, την ισόρροπη υπηρέτηση όλων των κλάδων και κεφαλαίων.

Οι άνθρωποι που συνέταξαν τα φετινά θέματα έδειξαν τόλμη και επέμειναν, συνεχίζοντας την περυσινή αρχή, να θέσουν στην πλειονότητα τους καλά ερωτήματα που ελέγχουν βασικές και σημαντικές γνώσεις - δεξιότητες. Που διακρίνουν την επί της ουσίας κατανόηση από την άνευ ουσίας διεκπεραίωση

[12] Βλ. σχετικά
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=28&t=1474&p=8985&hilit=%CF%87%CF%8E%CF%81%CE%B1#p8985

των τεχνασμάτων. Έθεσαν ένα κριτήριο μαθηματικής αξιοσύνης που αν υιοθετηθεί και οριστικοποιηθεί θα οδηγήσει σε καλλίτερα καταρτισμένους και εκπαιδεύσιμους φοιτητές.

2.3 Η διατήρηση της παράδοσης του μη επαρκούντος χρόνου.

Υπάρχει μια παράδοση στις πανελλήνιες εξετάσεις ο χρόνος να επαρκεί για την ικανοποιητική πραγμάτευση των θεμάτων μόνο αν ο εξεταζόμενος σκέφτεται και γράφει γρήγορα. Χαρακτηριστικές χρονιές που «τιμήθηκε» η παράδοση το 2015, το 2011, το 2007 αλλά και άλλες. Δυστυχώς και φέτος η κακή αυτή παράδοση διατηρήθηκε. Κατά πολλές εκτιμήσεις και μαρτυρίες έμπειροι εκπαιδευτικοί χρειάστηκαν από 90 έως 120 λεπτά για να λύσουν και να καθαρογράψουν τα θέματα. Αυτός ο χρόνος χρειάζεται να πολλαπλασιαστεί κατ΄ ελάχιστον με 2 για να δώσει ένα μέτρο του χρόνου που πρέπει να διατίθεται στους μαθητές. Με την στενότητα του χρόνου αρκετοί μαθητές που σκέφτονται σε βάθος αλλά όχι κατ΄ ανάγκην γρήγορα παρουσίασαν μια υποεπίδοση αναντίστοιχη των γνώσεων και των ικανοτήτων τους.

3 Η πρόσληψη των θεμάτων.

Τα φετινά θέματα προκάλεσαν ποικίλες αντιδράσεις. Γράφτηκαν πάρα πολλά, ιδίως στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης. Τις πρώτες μέρες πολλοί εκπαιδευτικοί, γονείς, αδέλφια και άλλοι συγγενείς έσπευσαν να εκφέρουν γνώμη. Αν και όλοι διαθέτουμε μια γνώμη δεν είναι πάντα όλες οι γνώμες ισότιμες. Στο θέμα μας, κακά τα ψέματα, οι γνώμες που μετράνε είναι αν όχι των ειδικών τουλάχιστον των πιο σχετικών. Είναι προφανές ότι γνώμες επί των θεμάτων ανθρώπων που δεν είναι μαθηματικοί δεν έχουν καμία αξία.

Ως είναι φυσικό οι απόψεις για τα θέματα διίστανται. Υπήρξαν πλείστοι εκπαιδευτικοί που θεώρησαν τα θέματα επιτυχή και ανέπτυξαν τους λόγους στους οποίους στηρίζουν μια τέτοια γνώμη. Δεδομένου ότι στα προηγούμενα καταβλήθηκε προσπάθεια να αναδειχθούν ορισμένα σημαντικά θετικά στοιχεία των θεμάτων, αρκετά από τα επιχειρήματα των υποστηρικτών τους έχουν ενσωματωθεί στην παρουσίαση αυτή. Στα επόμενα εξετάζονται ορισμένες κριτικές έως επικριτικές απόψεις.

3.1 Επιχειρήματα που κινούνται στην συγκινησιακή σφαίρα.

Ήταν από τα πρώτα επιχειρήματα που εμφανίσθηκαν. Διεκτραγωδούσαν καταστάσεις συντετριμμένων μαθητών, μαθητών που έκλαιγαν και παρουσίασαν τις εξετάσεις της 9ης Ιουνίου σαν σφαγή. Μάλιστα συντάχθηκαν και λογοτεχνικά απολογητικά κείμενα με αιτήματα συγνώμης. Βέβαια οι όσοι κατέφυγαν σε τέτοιου είδους επιχειρήματα παρέλειψαν:

1. Να αναφέρουν ότι η πλειονότητα των μαθητών αντιμετώπισε τα θέματα ως αυτό που ήταν: Θέματα ενός διαγωνισμού που είναι κοινά για όλους.

2. Να αναφέρουν ότι υπήρξαν μαθητές που παραδίδοντας τα γραπτά τους και ήσαν εξαιρετικά ικανοποιημένοι.

3. Να σκεφθούν ότι οι Πανελλήνιες εξετάσεις ανέκαθεν περιβάλλονταν από ένταση που είναι αποτέλεσμα πολλών παραγόντων και όχι μόνο των θεμάτων.

4. Να δώσουν ένα περίγραμμα του πως φαντάζονται ένα διαγωνισμό αυτής της κλίμακας όπου δεν θα στεναχωρηθεί όχι μόνο κάποιος γνωστός μαθητής *αλλά κανένας* μαθητής.

5. Να λάβουν υπ΄ όψιν ότι ιδίως την περίοδο που διαρκούν οι εξετάσεις χρειάζεται κλίμα ηρεμίας και σύνεσης. Και ότι δεν είναι θεμιτό να φιλοτεχνείται τεχνηέντως μια παραπλανητική εικόνα δήθεν κακομεταχείρισης και μια πλανώμενη αίσθηση αδικίας.

3.2 Επιχειρήματα που χρησιμοποιούν ποιοτικά κριτήρια.

Χρησιμοποιήθηκε ως επιχείρημα ότι τα θέματα δεν ήσαν κατάλληλα γιατί στερούνταν ορισμένων χαρακτηριστικών που όφειλαν να έχουν:

1. Πρωτοτυπίας

2. Φαντασίας

3. Ιδεών

Τα επιχειρήματα αυτού του τύπου χρησιμοποιούν όρους που δεν έχουν για όλους την ίδια σημασία. Πρόκειται για μια δυσκολία που δυσχεραίνει την επικοινωνία. Νομίζω όμως ότι μπορεί να ξεπεραστεί τουλάχιστον για όσους από μας έχουμε δημοσιοποιημένα δείγματα δουλειάς παρεμφερούς με τα θέματα των εξετάσεων. Η σύγκριση της δουλειάς αυτής με τα θέματα ίσως δείξει στους υπόλοιπους το κριτήριο μας. Διότι και οι κρίνοντες κρίνονται.

3.3 Επιχειρήματα που αναφέρονται σε χρήση ύλης προηγουμένων τάξεων.

Χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον το επιχείρημα ότι στα θέματα γινόταν συχνή ανάκληση ύλης προηγουμένων τάξεων ιδίως τριγωνομετρίας. Και ότι με αυτό τον τρόπο εξετάζονταν έμμεσα οι επιδόσεις σε άλλες τάξεις. Αλλά:

1. Σε αντίθεση με άλλα μαθήματα τα Μαθηματικά είναι αλυσίδα και προφανώς κάποιες γνώσεις των προηγούμενων τάξεων προϋποτίθενται.

2. Σε αντίθεση με άλλες χρονιές όπου ήταν απαιτητές γνώσεις που είχαν σχετικά απομακρυσμένη σύνδεση με τα διδασκόμενα στην Γ′ τάξη (π.χ. κωνικές τομές σε ασκήσεις μιγαδικών) φέτος αυτό που ζητήθηκε ήταν μια ελάχιστη εξοικείωση με τις συναρτήσεις που μελετά η στοιχειώδης Ανάλυση.

3. Όπως φάνηκε στην ενότητα 1 το σχολικό βιβλίο της Γ′ Τάξης παρείχε αρκετά παραδείγματα χειρισμού των σχετικών ερωτημάτων ακόμη και αν η ύλη των προηγουμένων τάξεων είχε ξεχαστεί.

3.4 Επιχειρήματα για αιτιολόγηση του Σ-Λ Α2.

Στο Α2 έπρεπε να είναι γνωστό:

1. Αν ισχύει το αντίστροφο ενός θεωρήματος

2. και γιατί.

Πρόκειται για εξέταση γνώσης που όπως σημειώθηκε υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Εδώ υπήρξαν ποικίλες αιτιάσεις:

1. Ότι δεοντολογικά δεν έπρεπε να ερωτηθεί αν ισχύει το αντίστροφο ενός θεωρήματος. Η αιτίαση αυτή παραβλέπει ότι υποχρέωση των εξεταστών είναι να ελέγξουν την καλή γνώση της θεωρίας στην οποία ασφαλώς εμπίπτει και η αιτιολόγηση του γιατί το αντίστροφο ενός θεωρήματος δεν αληθεύει.

2. Ότι νομικά δεν ήταν επιτρεπτό να ζητηθεί αιτιολόγηση τη στιγμή που σύμφωνα με την 141966/Δ2, ΦΕΚ 2894/2016 «Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων». Κατ΄ αρχάς εδώ γίνεται μια αυθαίρετη ερμηνεία της εγκυκλίου. Αυτό που ζητήθηκε από τους εξεταζόμενους δεν ήταν η γνώση ενός συγκεκριμένου παραδείγματος αλλά η παράθεση ενός μαθηματικού επιχειρήματος που να πείθει για την μη ισχύ του αντιστρόφου. Το ποιο παράδειγμα θα επιλεγεί αφέθηκε στους εξεταζόμενους.

3. Ότι διδακτικά δεν επιτρέπεται να ζητείται αιτιολόγηση σε Σ-Λ και για του λόγου το αληθές εν είδει γνωμοδότησης ανασύρθηκε κάποια περικοπή από ένα βιβλίο Διδακτικής των Μαθηματικών σύμφωνα με την οποία αυτού του είδους οι ερωτήσεις «είναι δύσκολο να κατασκευαστούν σωστά». Πιθανόν αυτό να είναι ακριβές. Αλλά εν προκειμένω έχουμε μια επιτυχημένη ερώτηση αυτού του είδους που *έχει ήδη* κατασκευαστεί σωστά.

Το συγκεκριμένο ερώτημα συνάντησε πολλές αντιδράσεις και καταβλήθηκε συστηματική προσπάθεια να αποδυναμωθεί. Ακολουθήθηκε δε μια πρακτική συνηθισμένη[13] σε θέματα που δεν είναι «δημοφιλή»: Να ασκηθεί πίεση[14] ώστε να θεωρηθούν με, κάποιο τρόπο, όσο γίνεται περισσότερες απαντήσεις αποδεκτές (συνολικά ή εν μέρει) ώστε να μειωθεί η απώλεια μονάδων. Η κατηγορία διαγωνιζομένων που συνήθως ευνοείται είναι μαθητές που έχουν απάντηση για όλα τα ερωτήματα εκτός από το επίμαχο. Πρόκειται προφανώς για ικανούς μαθητές οι οποίοι θα προτιμήσουν να δώσουν, ενδεχομένως αυτοσχεδιάζοντας, οποιαδήποτε απάντηση προκειμένου να μην αφήσουν το ερώτημα αναπάντητο. Αν πριμοδοτηθούν οι ενδιάμεσες απαντήσεις έρχονται περίπου σε ίση μοίρα με όσους διαγωνιζόμενους απάντησαν σε όλες τις ερωτήσεις. Μάλιστα καταβλήθηκε προσπάθεια να παρερμηνευθεί η φράση «να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α» και να εισαχθεί το σκεπτικό ότι αφού δεν λέει «να αποδείξετε» δίνει την δυνατότητα στους διαγωνιζόμενους να προσεγγίσουν το ερώτημα «χαλαρά»

Ας δούμε τι υπονοούσε αυτή η χαλαρότητα:

1. Να γράψει απλώς ότι το αντίστροφο δεν ισχύει διότι κάποιο σημείο μπορεί να είναι «γωνιώδες» ή «γωνιακό». Προφανώς μια τέτοια απάντηση χρειάζεται εξηγήσεις. Τι σημαίνουν οι σε εισαγωγικά όροι;

2. Να δοθεί κάποιο κατάλληλο σχήμα και να γίνει αναφορά σε διαφορετική κλίση των «ημιεφαπτομένων» που αντιστοιχούν σε κάποιο σημείο. Εδώ πέρα από το ότι χρειάζεται εξήγηση για τον όρο σε εισαγωγικά τίθεται το ερώτημα: Υπάρχει συνάρτηση στην οποία αναφέρεται το σχήμα; Αν ναι ποια;

3. Να επιχειρηματολογήσει περίπου ως εξής: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 ο λόγος το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι όριο μιας απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$. Ξέρουμε όμως ότι μια απροσδιόριστη μορφή μπορεί να έχει όριο ή να μην έχει όριο. Επομένως ο παράγωγος αριθμός μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει. Άρα μια συνεχής συνάρτηση μπορεί να είναι ή να μην είναι παραγωγίσιμη.

   Φυσικά ο συλλογισμός είναι εντελώς εσφαλμένος: Βεβαίως οι απροσδιόριστες μορφές διαμερίζονται σε εκείνες που έχουν όριο και σε εκείνες που δεν έχουν. Ωστόσο δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι τα όρια των λόγων μεταβολής στο x_0 θα παρακολουθούν αυτή την διαμέριση.

[13] Σε παλαιότερες εξετάσεις Μαθηματικών Γενικής Παιδείας ασκήθηκε έντονη πίεση να ληφθεί ως σωστή απάντηση που στηρίζονταν στη χρήση της εσφαλμένης για τις πιθανότητες συνεπαγωγής $P(A)=0 \Rightarrow A=\emptyset$.

[14] Με διάχυση «επιχειρημάτων» και τελικούς αποδέκτες τους βαθμολογητές.

3.5 Επιχειρήματα που αναφέρονται στην υποεκπροσώπηση των «υπαρξιακών» θεωρημάτων .

Πρόκειται για την βασική αντίρρηση κατά των θεμάτων. Με διάφορους τρόπους εκφράσθηκε, ούτε λίγο ούτε πολύ, η άποψη ότι η εκτατική χρήση και εξέταση θεμάτων όπου γίνονται παντοειδείς αποδείξεις για την ύπαρξη ενός ή περισσοτέρων ξ αποτελεί την καρδιά της Ανάλυσης. Όπως έγραψα στο 2.2 τα θεωρήματα αυτά έχουν ένα δευτερεύοντα υποβοηθητικό ρόλο για να επιτευχθούν οι βασικοί σκοποί της στοιχειώδους Ανάλυσης. Δεν πρόκειται για ασήμαντα θεωρήματα. Προφανώς έχουν σημασία τόσο στην αρχιτεκτονική όσο και στην αντιμετώπιση ορισμένων προβλημάτων. Σε σχολικό επίπεδο:

Το θεώρημα του Fermat μπορεί να μας οδηγήσει στην απόδειξη[15] του θεωρήματος Rolle. Αυτό μας βοηθάει σε ζητήματα πλήθους ριζών εξισώσεων και στην απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange. Το δε θεώρημα του Lagrange πέρα από τις εφαρμογές στου στην μονοτονία και στο κριτήριο σταθερής συνάρτησης (που μεταξύ άλλων μας περιγράφει πως θα είναι η δομή του συνόλου των παραγουσών μιας συνάρτησης) δίνει και ενδιαφέρουσες αποδείξεις ανισοτήτων και μπορεί να επεκταθεί σε *νύξεις* για το ανάπτυγμα Taylor. Τέλος αποτελεί προπομπό του θεωρήματος μέσης τιμής του Cauchy που επιτρέπει στους μαθητές να μαντέψουν τους κανόνες De l' Hospital. Όμως η ενασχόληση με αυτά τα θεωρήματα με φουσκωμένες ασκήσεις και «μεθοδολογίες»[16] δεν μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν ένα κεντρικό ρόλο στην διδασκαλία. Το Ελληνικό σύστημα προετοιμασίας για τα Πανεπιστήμια έχει διογκώσει σε τέτοιο βαθμό το θέμα ώστε πριν περίπου μια εικοσαετία κυκλοφόρησε ένα βοήθημα-συλλογή ασκήσεων αφιερωμένο εξ ολοκλήρου στο θεώρημα του Bolzano όπως επίσης και ένα άλλο αφιερωμένο στα θεωρήματα Rolle-Lagrange.[17]

Τα θεωρήματα Bolzano, Rolle, Lagrange μαζί με το θεώρημα του Weierstrass (μέγιστης και ελάχιστης τιμής) διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της Ανάλυσης [18] και έχουν ενδιαφέρουσες εεπεκτάσεις[19] αλλά ακόμη και η μορφή που διδάσκονται είναι συζητήσιμη.[20] Πάντως για να έχουμε μια εικόνα της θέσης που αποδίδεται σε αυτά τα θεωρήματα αφενός στην Α-

[15]Προσωπικά όταν δίδασκα επεδίωκα όπου μπορούσα να δίνω πλήρεις αποδείξεις.

[16] Η για δεύτερη φορά τοποθέτηση του όρου σε εισαγωγικά έχει μόνο ένα λόγο: Να δηλώσει την ανυπαρξία/ατελέσφορο του πράγματος: δεν υπάρχει κάτι που να λέγεται μεθοδολογία και να εξασφαλίζει την απρόσκοπτη επίλυση όλων των ασκήσεων.

[17]Παλαιότερα σε άλλη παραλλαγή αυτού του είδους υπερβολής είχαμε βιβλία αφιερωμένα στο τριώνυμο ή στις απόλυτες τιμές.

[18]Στην πραγματικότητα χαρακτηρίζουν το $\mathbb{R}$:
Ν.Σ. Ματρογιαννης *Τα θεωρήματα Bolzano, Weierstrass, Rolle και η δομή του* $\mathbb{R}$. Ευκλείδης Γ', 8, 1985, σελ. 37-47
Holger Teismann *Toward a More Complete List of Completeness Axioms* The American Mathematical Monthly, Vol. 120, 2, 2013 σελ. 99-114

[19]P.K. Sahoo, T. *Riedel Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific, 1998

[20]Ralph P. Boas *Who Needs Those Mean-Value Theorems, Anyway?* The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 12, No. 3, 1981 σελ. 178-181

νάλυση και αφετέρου στην διδασκαλία της στο Λυκειακό επίπεδο θα πρέπει να εξετάσουμε προσεκτικά δύο πηγές - κριτήρια:

1. Σημαντικά, πολύ γνωστά και διεθνώς[21] καταξιωμένα βιβλία Ανάλυσης.[22]

2. Τι εξετάζεται από την Ανάλυση και πως στα θέματα εξετάσεων ανάλογων με τις Πανελλήνιες άλλων χωρών όπως οι International Baccalaureate, Baccalauréat, GCE Advanced Level, Advanced Placement Tests, Abitur, STEP, Scottish Highers κ.α.

Το δεύτερο κριτήριο ίσως να μην είναι αρκούντως πειστικό διότι μπορεί να προβληθεί το αντεπιχείρημα πως το τι διδάσκεται και το τι/πως εξετάζεται στο σύστημα μια χώρας αποτελεί μια Εθνική πολιτισμική επιλογή που δεν είναι ανάγκη να συμβαδίζει με τις επιλογές άλλων χωρών. Όμως το πρώτο δηλαδή το πως αντιλαμβάνονται το status των συγκεκριμένων θεωρημάτων έγκριτοι επιστήμονες οφείλει να είναι πειστικό εκτός αν κάποιοι πιστεύουν ότι έχουμε και τα δικά μας Εθνικά Μαθηματικά!

3.6 Επιχειρήματα που αναφέρονται στο ότι τα θέματα δεν εξετάζουν αυτά που διδάχθηκαν οι μαθητές.

Υπήρξαν φωνές που που υποστήριξαν ότι δεν λήφθηκε υπ΄ όψιν το τι διδάχθηκαν οι μαθητές. Μάλιστα κάποιοι υποστήριξαν ότι αυτό το «υπ΄ όψιν» πρέπει να περιλαμβάνει και ότι διδάσκεται όχι μόνο στα σχολεία αλλά και στα φροντιστήρια. Πρόκειται προφανώς για ένα εξαιρετικά αδύναμο επιχείρημα. Η επιτροπή των θεμάτων οφείλει να λάβει υπ΄ όψιν της το σχολικό βιβλίο και την οριοθετημένη ύλη και τις οδηγίες διδασκαλίας. Τα θέματα εξέτασαν, ευλαβικά θα λέγαμε, πράγματα που κατ΄ εξοχήν έπρεπε να διδάσκονται και να μελετούν οι μαθητές.

[21] Αν και έχουμε μερικά πολύ καλά βιβλία Ελλήνων συγγραφέων αναφέρομαι σε ξένα βιβλία για να έχουμε ένα πιο διαδεδομένο μέτρο σύγκρισης

[22] Ενδεικτικά :

(α΄) Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 1st Edition, Addison-Wesley, 1973 (1957), ιδίως το κεφάλαιο 5.

(β΄) R. Courant, *Differential and Integral Calculus*,2d Edition, Blackie & Son, 1948 (1937), Προσάρτημα 1 στο κεφάλαιο 1 και κεφάλαιο 2.

(γ΄) G.H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, 10th Edition, Cambridge, 1975 (1952), ιδίως το κεφάλαιο 6.

(δ΄) Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3d Edition, McGraw-Hill, 1976, ιδίως το κεφάλαιο 5.

(ε΄) Michael Spivak *Calculus*, 3d Edition, Publish or Perish, 1994, ιδίως το κεφάλαιο 11.

(ϛ΄) George B. Thomas, Ross L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 6th Edition, Addison-Wesley & Narosa, 1999, ιδίως το κεφάλαιο 5.

(ζ΄) Vladimir A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, 2d Edition, Springer, 2016, ενότητα 5.3.

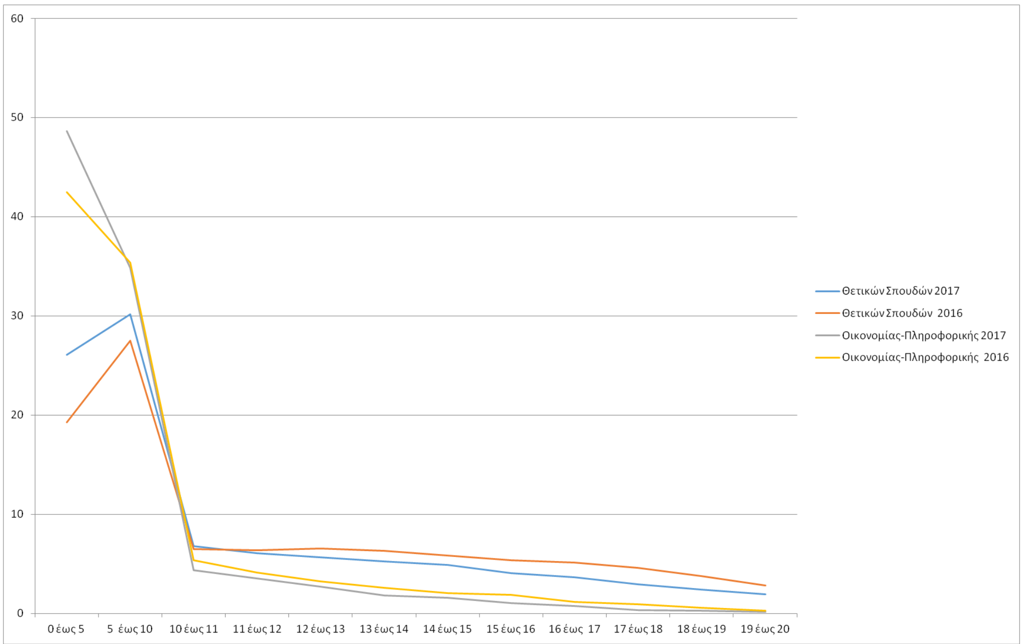
Τέλος δεν πρέπει να παραβλέπεται ότι στις εξετάσεις εμπλέκονται με άμεσο τρόπο:

1. Οι εξεταζόμενοι μαθητές.
2. Οι διδάσκοντες καθηγητές.
3. Η επιτροπή επιλογής των θεμάτων.

Οι πρώτοι (ας σημειωθεί ότι ορισμένοι εξ αυτών έχουν και δικαίωμα ψήφου) είναι υπεύθυνοι για το τι θα μελετήσουν, πως θα μελετήσουν και σε τι βάθος. Οι δεύτεροι και οι τρίτοι είναι υπεύθυνοι περίπου για τα ίδια πράγματα μόνο τα ρήματα αλλάζουν και το «μελετήσουν» αντικαθίσταται από τα «διδάξουν», «εξετάσουν». Τα αποτελέσματα είναι πάντα συνδυασμός των επιμέρους ευθυνών αλλά κάθε ομάδα δεν παύει να έχει τις δικές της.

3.7 Επιχειρήματα που αναφέρονται στις χαμηλές τελικές βαθμολογίες.

Σύμφωνα με τα επίσημα στοιχεία του Υπουργείου η % κατανομή της βαθμολογίας των δύο τελευταίων ετών για τα Ημερήσια Λύκεια είναι εκείνη (βλέπε και Προσάρτημα 1) του παρακάτω διαγράμματος:



Μερικές άμεσες παρατηρήσεις είναι:

1. Υπάρχει μια μεγάλη συγκέντρωση μαθητών στις χαμηλές βαθμολογίες και τα ποσοστά από το βαθμό 10 και άνω όσο κινούμεθα προς τις μεγάλες βαθμολογίες βαίνουν μειούμενα.

2. Οι φετινές βαθμολογίες ήσαν σε απόλυτα μεγέθη χαμηλότερες από τις περυσινές.

Γράφτηκε πριν την ανακοίνωση των βαθμολογιών ότι οι εξετάσεις θα κριθούν επιτυχείς αν η βαθμολογία ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αυτό το επιχείρημα, που αποτελεί αναπαραγωγή μιας «αρχής» που διαχέεται σε πολλά βιβλία εκπαιδευτικής ψυχολογίας ή αξιολόγησης, δεν είναι κατά την γνώμη μου βάσιμο.[23]. Δεν υπάρχει κάποια a priori αρχή για την κατανομή εκτός από την ανάγκη να γίνεται καλά η διάκριση των ικανοτήτων. Δεδομένου δε ότι πρόκειται για διαγωνισμό αυτό που κυρίως έχει σημασία είναι η σειρά στην βαθμολογία και όχι ο απόλυτος βαθμός.[24] Από αυτή την άποψη η διάκριση που πέτυχαν τα θέματα είναι ικανοποιητική. Βέβαια γράφτηκαν πολλά για την μείωση των αριστούχων αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι πάντα έχουμε αριστούχους *σε σχέση* με κάποιες εξετάσεις. «Αριστούχος» δεν είναι μια μόνιμη ιδιότητα και εν πάση περιπτώσει δε μπορεί να συμβαδίζει με την υπερτιμημένη εικόνα που προσφέρουν άλλες περισσότερο προσωποποιημένες αξιολογήσεις. Αν οι εξετάσεις ξεχώρισαν τους εξαιρετικά ικανούς από του πολύ ικανούς καλώς έκαναν. Διότι πίσω από αυτή την διαφορά βρίσκεται πολύς μόχθος που με κάποιο τρόπο πρέπει να καταγράφεται.

4 Επιλεγόμενα.

Κλείνοντας θέλω να τονίσω τα εξής:

1. Όσο πιο ψύχραιμα βλέπει κάποιος τις φετινές εξετάσεις διαπιστώνει ότι η επιτροπή θεμάτων έκανε πολύ καλή δουλειά επεκτείνοντας την προσπάθεια της περυσινής επιτροπής. Αυτό είναι ένα «κεκτημένο» που πρέπει να διατηρηθεί.

2. Οι πανελλήνιες εξετάσεις δε μπορούν να καταργηθούν. Μπορούν όμως να γίνουν ουσιαστικές, έλλογες και να υπόκεινται σε θεσμικούς κανόνες που θέτουν αποκλειστικά οι εκπαιδευτικές αρχές. Όχι μόνο επί της διαδικασίας αλλά και επί της ουσίας. Η τελευταία δε ασφαλώς περιλαμβάνει και το περιεχόμενο τους. Αν δε για οποιοδήποτε λόγο στο πεδίο αυτό είχε στο παρελθόν χαθεί έδαφος αυτό πρέπει στο μέλλον να ανακτηθεί.

3. Τα θέματα των δύο τελευταίων ετών αποτελούν εξαιρετική αφορμή για να ξεκινήσει μια συζήτηση στην μαθηματική κοινότητα για το τι είναι ουσιώδες στα Μαθηματικά και άρα το αναδεικνύουμε και τι επουσιώδες και άρα το αγνοούμε.

---

[23]Βλ. σχετικά
Ν.Σ. Μαυρογιαννης *Πόσο Κανονική είναι η Κανονική Κατανομή;* ΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΗ, 20, 1983 σελ. 28-47.

[24]Αυτός έχει σημασία όταν πρόκειται να γίνει σύγκριση με βαθμολογίες που δεν προέρχονται από τα ίδια μαθήματα αλλά αυτό είναι άλλης τάξης πρόβλημα του εξεταστικού μας συστήματος.

4. Τα στατιστικά των εξετάσεων όλων των ετών μας θέτουν ενώπιον των ευθυνών μας. Ας δούμε ένα στοιχείο από τα φετινά: Περίπου 15.500 εξεταζόμενοι δεν συγκέντρωσαν πάνω από 5 μονάδες στις 20. Δηλαδή μετά από περίπου 80-95 (ίσως και περισσότερες) ώρες διδασκαλίας σε ετήσια βάση στο σχολείο δεν κατόρθωσαν να απαντήσουν σωστά στα παρακάτω ερωτήματα Α1, Α3, Α4β, Α4δ, Α4ε, Β1, Β2 για να συγκεντρώσουν 7+4+2+2+5+6=26 μονάδες στην κλίμακα του 100. Ίσως πρέπει να ξαναδούμε κάποια στοιχεία της δουλειάς μας και να επανεντάξουμε κάποιες παραδοσιακές αρχές: Ανυποχώρητη επιμονή στα βασικά, πειθαρχία, συνέπεια.

5. Φυσικά δεν πρέπει να μείνουμε στην προηγούμενη παρατήρηση που είναι «τοπική». Το θέμα της διάχυσης των Μαθηματικών στην κοινωνία ως μορφωτικό αγαθό και στους επαγγελματίες ως εφόδιο είναι μείζον. Αν και δεν είναι θέμα του παρόντος κειμένου θα ήθελα να σημειώσω πως είναι καλό είναι να έχουμε κατά νου ότι:

   (α´) Στο όνομα της «προετοιμασίας» σημαντικά τμήματα των Μαθηματικών που διδάσκονται στο Λύκειο (Γεωμετρία, μέρος της Άλγεβρας) απαξιώνονται. Στο δε όνομα της ευκολίας και της λίγης ύλης έχουν μείνει εκτός Λυκείου η Συνδυαστική και η Θεωρία Αριθμών.

   (β´) Ένας μαθητής με τις παρούσες συνθήκες μπορεί (δυνητικό) να τελειώσει το Λύκειο χωρίς να έχει μάθει (για διάφορους λόγους) σχεδόν τίποτε από τα Μαθηματικά που προσφέρονται σε αυτή την βαθμίδα.

   (γ´) Ο ίδιος μαθητής ενδέχεται να ακολουθήσει ένα επάγγελμα που απαιτεί να τα διδάξει (π.χ. δάσκαλος) εμπλέκοντας τους μαθητές του στον ίδιο φαύλο κύκλο μαθηματικής υποεπίδοσης.

Προσαρτημα 1 : Βαθμολογίες στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Ημερησίων Λυκείων για τα έτη 2016 και 2017

	0-5	**5-10**	**10-11**	**11-12**	**12-13**	**13-14**	**14-15**	**15 -16**	**16-17**	**17-18**	**18-19**	**19-20**
Θετικών Σπουδών 2017	26,09	30,17	6,77	6,1	5,65	5,27	4,88	4,06	3,66	2,96	2,43	1,96
Θετικών Σπουδών 2016	19,25	27,51	6,5	6,38	6,54	6,3	5,82	5,37	5,15	4,58	3,79	2,81
Οικονομίας και Πληροφορικής 2017	48,62	34,83	4,37	3,52	2,72	1,84	1,57	1,02	0,73	0,31	0,29	0,17
Οικονομίας και Πληροφορικής 2016	42,49	35,4	5,35	4,14	3,25	2,56	2,02	1,86	1,19	0,9	0,56	0,29

ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ 2 : Οι εκφωνήσεις των θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ,.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση fείναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.
β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $\mathrm{f}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$.
γ) Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
δ) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$.
ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x,\ x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x},\ x \neq 1$.
Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν

$$h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right),\ x \in (0,1),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ϕ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.
Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το rmA, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $(\varepsilon_1) : y = -x$ και $(\varepsilon_2) : y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της fκαι τις ευθείες (ε_1), (ε_2) και

- E_3 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{x - \eta\mu x}{\pi - x - \eta\mu x}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int\limits_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x) = e^{5x},\ x \in \mathbb{R}$, τον άξονα ψ'ψ και την ευθεία.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8